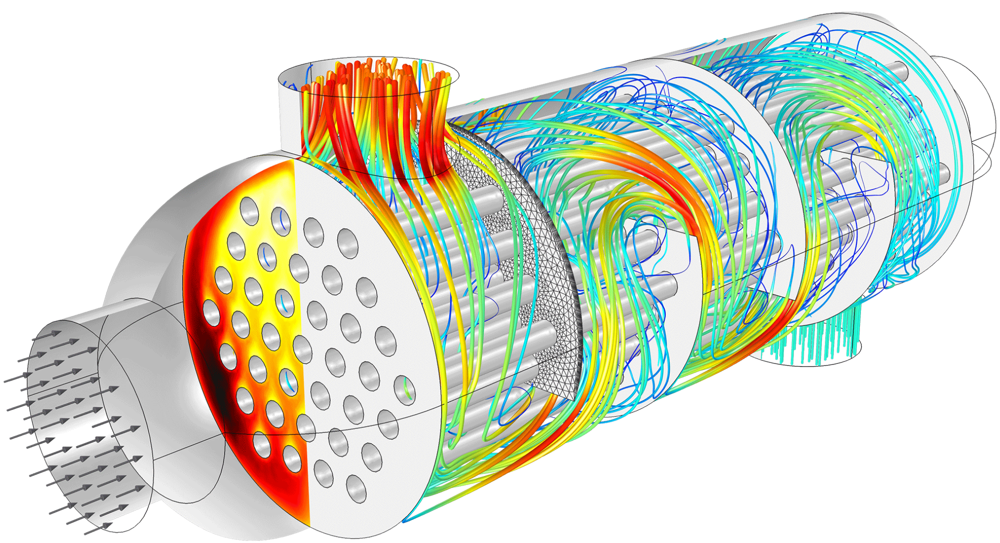
Universidad Simón Bolívar
MA-2113

RECOPILACIÓN DE EJERCICIOS RESUELTOS DE MATEMÁTICAS VI



Recopilado, resuelto y tipeado en LaTeX

José A. Da Silva R.

Febrero 2021

Índice General

Cuando muere, todo el mundo debe dejar algo detrás, decía mi abuelo. Un hijo, un libro, un cuadro, una casa, una pared levantada o un par de zapatos. O un jardín plantado. Algo que tu mano tocará de un modo especial, de modo que tu alma tenga algún sitio a donde ir cuando tú mueras, y cuando la gente mire ese árbol, o esa flor, que tú plantaste, tú estarás allí. No importa lo que hagas -decía-, en tanto que cambies algo respecto a como era antes de tocarlo, convirtiéndolo en algo que sea como tú después de que separes de ellos tus manos. La diferencia entre el hombre que se limita a cortar el césped y un auténtico jardinero está en el tacto. El cortador de césped igual podría no haber estado allí, el jardinero estará allí para siempre.

Fahrenheit 451
Ray Bradbury

1 Motivación

Mi motivación en la realización de todas las guías de ejercicios que encontrarán de mi autoría recae sobre el gran amor que le tengo a mi alma mater, la Universidad Simón Bolívar. A mediados de mi carrera universitaria sabía que no quería irme de los pasillos de la USB sin dejarle algo de mí, como ella lo había hecho conmigo.

De ahí nace este gran proyecto personal de transcribir todos esos ejercicios, notas, procedimientos, análisis, creación de programas numéricos, entre otros; que recibí de mis grandes maestros y los que son de mis propias manos, con el fin de ser un material de estudio para los venideros estudiantes en su camino por el mundo de la excelencia de la USB. A través de estos documentos, busco ayudar a mi universidad a seguir siendo un atractivo para los estudiantes regulares y aquellas personas que quieran trabajar por ella.

¿Por qué? Porque las universidades son fuente de conocimiento y, si es bien conducido este gran poder, nos separará de la barbarie e ignorancia que intentan destruir fervientemente a la primera desde hace bastante tiempo.

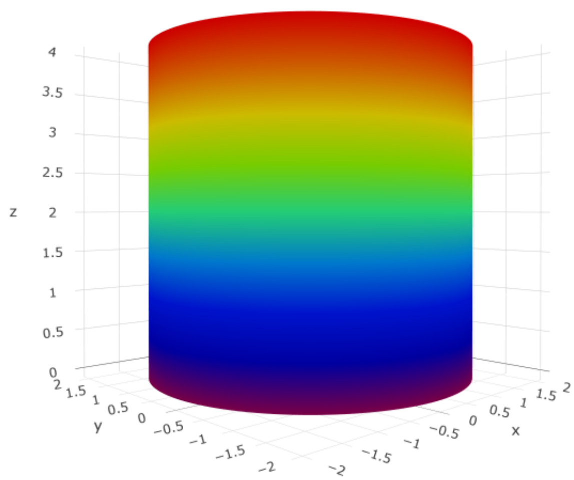
A pesar de las dificultades que supone estudiar en una universidad pública venezolana, me encontré en los salones de clases a increíbles compañeros que compartíamos el mismo sueño y a excelentes maestros que eternamente estaremos agradecidos con la dedicación, compromiso, tiempo y paciencia al mostrarnos el camino del conocimiento. En las dependencias administrativas, encontré un personal que, a pesar que su labor es "invisible" en nuestro día a día de estudiantes universitarios, hacen todo lo posible para que la universidad sea un sistema interconectado y funcione de la mejor manera. Y, a todo el personal de transporte y limpieza, que representan los pequeños pero importantes engranajes de un gran sistema como la USB.

Ninguno de ellos se les da una cantidad remotamente similar a lo que debería atribuírsele económicamente por su gran trabajo y esfuerzo diario y, aún así, estuvieron presente para que cada uno de nosotros tuviese un lugar en el salón de clases, en las agrupaciones estudiantiles, en la soñada graduación, entre otros. Por eso, más en estos momentos, es donde la USB necesita la ayuda de su gente.

2 Plano Tangente a una Superficie

1. Sea la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = 4,\, 0 \leq z \leq 4\}$. Hallar el plano tangente a la superficie S en el punto $P = (2, 0, 0)$.

   Solución: La superficie S se trata de un cilindro de radio igual a 2 centrado en el origen de coordenadas, que se encuentra acotado entre los planos $z = 0$ y $z = 4$. De la figura, se puede concluir que el plano tangente a S y que pasa por el punto $P = (2, 0, 0)$ es el plano $x = 2$.



Sin embargo, vamos a utilizar las herramientas de parametrización de superficies para demostrar dicho resultado.

Parametrizamos a la superficie S mediante la función $\vec{\Phi}$. Para ello, al tratarse de un cilindro, utilizaremos las coordenadas cilíndricas. Así, la parametrización de S es:

$$\vec{\Phi} \,:\, D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \,/$$

$$(u, v) \rightarrow \vec{\Phi}(u, v) = \begin{pmatrix} 2\cos(u) \\ 2\sin(u) \\ v \end{pmatrix} \,/\, D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \leq u \leq 2\pi \,,\, 0 \leq v \leq 4\}$$

Luego, hallamos el punto $P \in S$ en términos de las variables de la parametrización (u_0, v_0)

$$\vec{\Phi}(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} 2\cos(u_0) \\ 2\sin(u_0) \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \cos(u_0) = 1 \\ \sin(u_0) = 0 \\ v_0 = 0 \end{cases} \Longrightarrow (u_0, v_0) = (0, 0)$$

De esta forma, hallamos los vectores tangentes a la superficie S parametrizada por Φ, evaluados en el punto (u_0, v_0):

$$\vec{T}_u(u_0, v_0) = \left.\frac{\partial \vec{\Phi}(u, v)}{\partial u}\right|_{u_0, v_0} = \left.\begin{pmatrix} -2\sin(u) \\ 2\cos(u) \\ 0 \end{pmatrix}\right|_{(u_0, v_0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{T}_v(u_0, v_0) = \left.\frac{\partial \vec{\Phi}(u, v)}{\partial v}\right|_{u_0, v_0} = \left.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|_{(u_0, v_0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego, hallamos el PVF:

$$\vec{T}_u(u_0, v_0) \times \vec{T}_v(u_0, v_0) = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por otra parte, para la construcción de un plano se necesita un vector perteneciente y uno normal al mismo. El PVF nos dió el segundo, ahora falta encontrar el primero.
Sea $Q = (x, y, z)$ un punto génerico del plano en cuestión. Luego, con los puntos P y Q puede encontrarse un vector perteneciente al plano. Así:

$$Q - P = \vec{QP} = (x, y, z) - (2, 0, 0) = (x - 2, y, z)$$

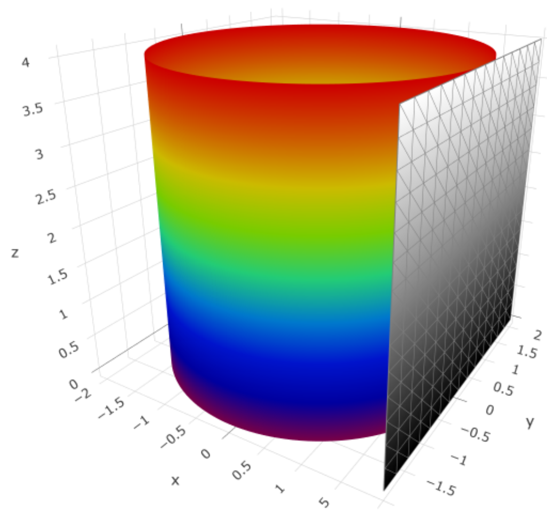
De esta forma, ya podemos hallar la ecuación del plano tangente

$$< \vec{T}_u(u_0, v_0) \times \vec{T}_v(u_0, v_0) \,, \begin{pmatrix} x - 2 \\ y \\ z \end{pmatrix} >= 0 \Longrightarrow < \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} x - 2 \\ y \\ z \end{pmatrix} >= 0$$

$$\Longrightarrow 2(x-2) = 0 \Longrightarrow x = 2$$

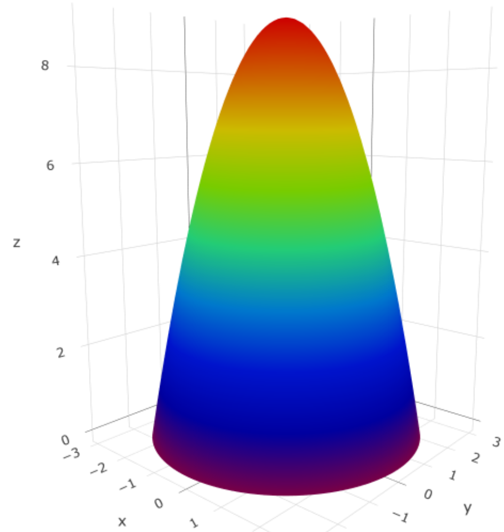
Finalmente, el resultado encontrado era el esperado. Así, el plano tangente a la superficie S en el punto $P = (2, 0, 0)$ es:

$$\boxed{x = 2}$$



2. Sea la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 9 - x^2 - y^2,\ z \geq 0\}$. Hallar el plano tangente a la superficie S en el punto $P = (2, 1, 4)$.

   Solución: La superficie S corresponde a la parte positiva del paraboloide centrado en el punto P $(0, 0, 9)$, como se muestra en la figura.



Parametrizamos a la superficie S mediante la función $\vec{\Phi}$. Para ello, utilizamos las variables x y y como parámetros. Así, la parametrización de S es:

$$\vec{\Phi}\,:\,D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3\,/$$

$$(x,y)\to\vec{\Phi}(x,y)=\begin{pmatrix} x\\ y\\ 9-x^2-y^2\end{pmatrix}\,/\,D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,9-x^2-y^2\geq 0\right\}$$

De esta forma, hallamos los vectores tangentes a la superficie S parametrizada por Φ, evaluados en el punto $(x_0,y_0)=(2,1)$:

$$\vec{T}_x(x_0,y_0)=\left.\frac{\partial\vec{\Phi}(x,y)}{\partial x}\right|_{x_0,y_0}=\left.\begin{pmatrix}1\\0\\-2x\end{pmatrix}\right|_{(x_0,y_0)}=\begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix}$$

$$\vec{T}_y(x_0,y_0)=\left.\frac{\partial\vec{\Phi}(x,y)}{\partial y}\right|_{x_0,y_0}=\left.\begin{pmatrix}0\\1\\-2y\end{pmatrix}\right|_{(x_0,y_0)}=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$$

Luego, hallamos el PVF:

$$\vec{T}_{xy}(x_0, y_0) \times \vec{T}_y(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

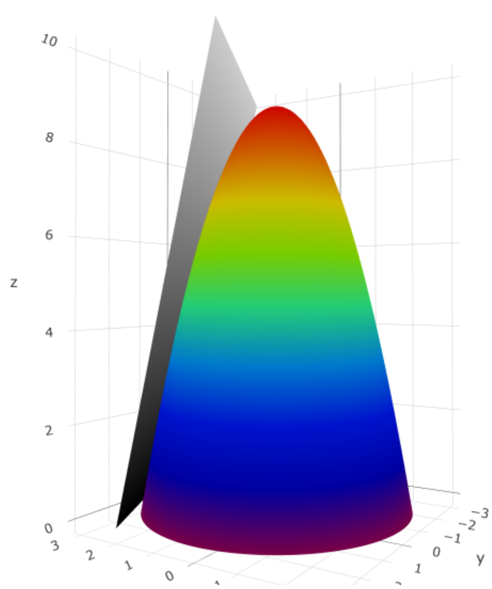
Luego, sea el vector $\vec{V} = (x-2, y-1, z-4)$ un vector perteneciente al plano tangente a la superficie en el punto P. De esta forma, realizando el producto punto entre el PVF y este último vector hallamos la ecuación del plano tangente.

$$< \vec{T}_x(x_0, y_0) \times \vec{T}_y(x_0, y_0) \, , \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z-4 \end{pmatrix} >= 0 \Longrightarrow < \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z-4 \end{pmatrix} >= 0$$

$$\Longrightarrow 4(x-2) + 2(y-1) + (z-4) = 0 \Longrightarrow 4x + 2y + z = 14$$

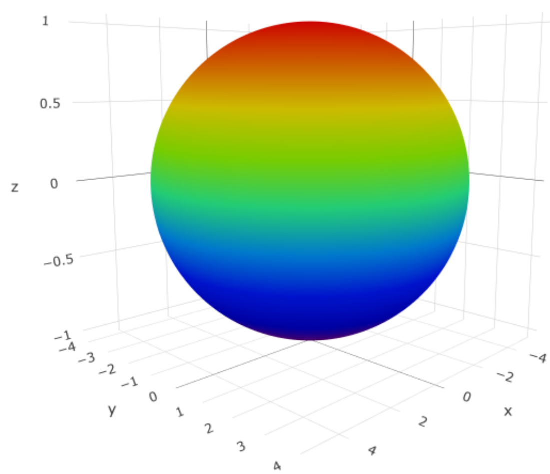
Finalmente, el plano tangente a la superficie S en el punto $P = (2, 1, 4)$ es:

$$\boxed{4x + 2y + z = 14}$$



3. Sea la superficie $S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} + z^2 = 1 \right\}$. Hallar el plano tangente a la superficie S en el punto $P = (5,0,0)$.

Solución: La superficie S corresponde a un elipsoide centrado en el punto P $(0,0,0)$ y de longitud de semiejes $a = 5$, $b = 4$ y $c = 1$, como se muestra en la figura.



Parametrizamos a la superficie S mediante la función $\vec{\Phi}$. Para ello, se introduce la siguiente parametrización de S:

$$\vec{\Phi} \,:\, D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \,/$$

$$(u,v) \to \vec{\Phi}(u,v) = \begin{pmatrix} 5\cos(u)\sin(v) \\ 4\sin(u)\sin(v) \\ \cos(v) \end{pmatrix} \,/\, D = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \,/\, u \in [0,2\pi] \;\; v \in [0,\pi] \right\}$$

Luego, hallamos el punto $P \in S$ en términos de las variables de la parametrización (u_0, v_0)

$$\vec{\Phi}(u_0,v_0) = \begin{pmatrix} 5\cos(u_0)\sin(v_0) \\ 4\sin(u_0)\sin(v_0) \\ \cos(v_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \cos(u_0)\sin(v_0) = 1 \\ \sin(u_0)\sin(v_0) = 0 \\ \cos(v_0) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (u_0,v_0) = \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \\ (u_0,v_0) = \left(2\pi, \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

De esta forma, hallamos los vectores tangentes a la superficie S parametrizada por Φ, evaluados en el punto (u_0, v_0):

$$\vec{T}_u(u_0, v_0) = \left.\frac{\partial \vec{\Phi}(u,v)}{\partial u}\right|_{u_0,v_0} = \left.\begin{pmatrix} -5\sin(u)\sin(v) \\ 4\cos(u)\sin(v) \\ 0 \end{pmatrix}\right|_{(u_0,v_0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{T}_v(u_0, v_0) = \left.\frac{\partial \vec{\Phi}(u,v)}{\partial v}\right|_{u_0,v_0} = \left.\begin{pmatrix} 5\cos(u)\cos(v) \\ 4\sin(u)\cos(v) \\ -\sin(v) \end{pmatrix}\right|_{(u_0,v_0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

A pesar de tener dos posibles puntos de la parametrización Φ para el punto P, se obtuvieron los mismos vectores tangentes T_u y T_v. Luego, hallamos el PVF:

$$\vec{T}_u(u_0, v_0) \times \vec{T}_v(u_0, v_0) = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

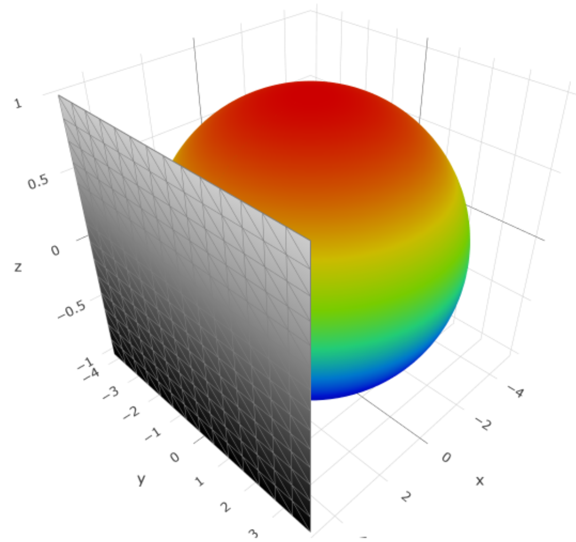
Luego, sea el vector $\vec{V} = (x-5, y, z)$ un vector perteneciente al plano tangente a la superficie en el punto P. De esta forma, realizando el producto punto entre el PVF y este último vector hallamos la ecuación del plano tangente.

$$< \vec{T}_u(u_0, v_0) \times \vec{T}_v(u_0, v_0)\, , \begin{pmatrix} x-5 \\ y \\ z \end{pmatrix} >= 0 \Longrightarrow < \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} x-5 \\ y \\ z \end{pmatrix} >= 0$$

$$\Longrightarrow -4(x-5) = 0 \Longrightarrow x = 5$$

Finalmente, el plano tangente a la superficie S en el punto $P = (5, 0, 0)$ es:

$$\boxed{x = 5}$$

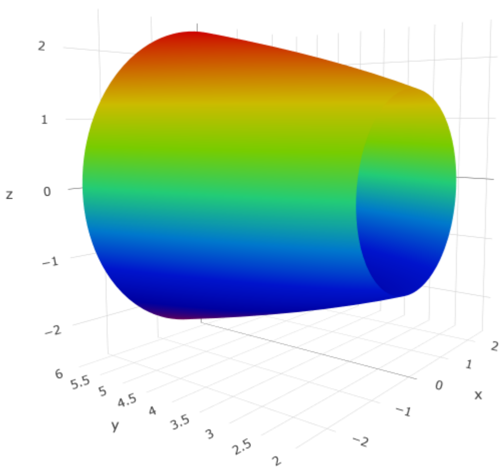

z
y
x

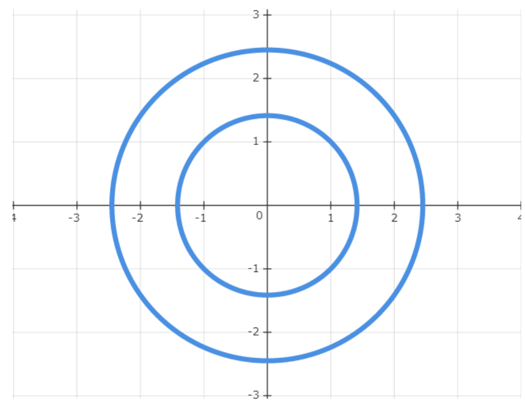
3 Área de Superficies Parametrizadas

4. Halle el área de la superficie S tal que $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = x^2 + z^2,\, 2 \leq y \leq 6\right\}$.

Solución: Parametrizamos a la superficie S mediante la función $\vec{\Phi}$. Para ello, debemos "despejar" una de las tres variables x, y, z en función de otras dos. Veamos que la superficie S impone una condición sobre la variable y. Por ende, nuestra parametización será con respecto a las variables x, z.

Veamos que la región a tratar es un paraboloide de sección transversal circular. Luego, la superficie S se trata del área lateral del paraboloide que se encuentra acotado entre los planos $y = 2$ y $y = 6$, y la región D se trata de dos círculos concéntricos de radios $\sqrt{2}$ y $\sqrt{6}$.





Así, la parametrización de S corresponde a:

$$\vec{\Phi} \,:\, D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \,/$$

$$(x, z) \to \vec{\Phi}(x, z) = \begin{pmatrix} x \\ x^2 + z^2 \\ z \end{pmatrix} \,/\, D = \left\{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 2 \leq x^2 + z^2 \leq 6\right\}$$

De esta forma, hallamos los vectores tangentes a la superficie S parametrizada por Φ:

$$\vec{T}_x(x, z) = \frac{\partial \vec{\Phi}(x, z)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{T}_z(x, z) = \frac{\partial \vec{\Phi}(x, z)}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego, hallamos el PVF:

$$\vec{T}_x(x,z) \times \vec{T}_z(x,z) = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 2z & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ -1 \\ 2z \end{pmatrix}$$

De esta forma, hallamos la norma del vector normal:

$$||\vec{T}_x(x,z) \times \vec{T}_z(x,z)|| = \sqrt{(2x)^2 + (-1)^2 + (2z)^2} = \sqrt{4(x^2+z^2)+1}$$

Seguidamente, el área de la superficie S es:

$$\iint_S 1 \cdot dS = \iint_D ||\vec{T}_x(x,z) \times \vec{T}_z(x,z)||\, dA$$

Sustituyendo los elementos anteriormente encontrados tenemos que:

$$\iint_S dS = \iint_D \sqrt{4(x^2+z^2)+1}\, dA$$

Aplicamos el siguiente cambio de coordenadas:

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ z = r\sin(\theta) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} D = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 2 \leq x^2+z^2 \leq 6\} \\ D^* = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \sqrt{2} \leq r \leq \sqrt{6} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\right\} \end{cases}$$

En tal sentido, tenemos que:

$$\iint_S dS = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} \int_0^{2\pi} \sqrt{4r^2+1}\,|r|\, d\theta dr = \frac{\pi}{4}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} 8r\sqrt{4r^2+1}\, dr = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}\left(\left(4r^2+1\right)^{3/2}\Big|_{r=\sqrt{2}}^{r=\sqrt{6}}\right.$$

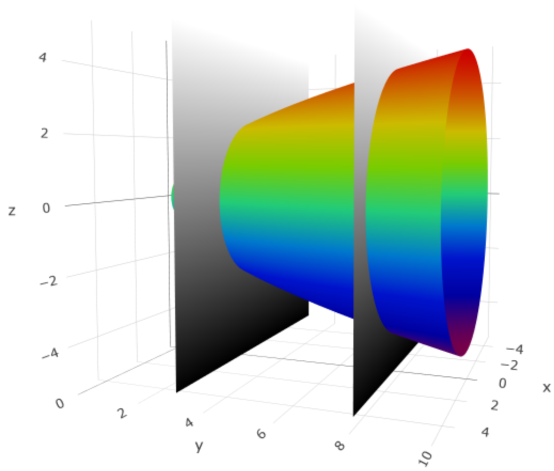
$$\iint_S dS = \frac{\pi}{6}\left(25^{3/2} - 9^{3/2}\right) = \frac{49\pi}{3}$$

Finalmente:

$$\boxed{A(S) = \iint_S dS = \frac{49\pi}{3}}$$

5. Halle el área de la superficie S tal que $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2y \geq x^2 + z^2,\, 3 \leq y \leq 8\right\}$.

Solución: Véase que Ω se trata de una región en $\mathbb{R}^{\nvDash}$. Esta es la región dentro del paraboloide de ecuación $y = \dfrac{x^2+z^2}{2}$ acotada por los planos $y = 3$ y $y = 8$, como se muestra en la figura.

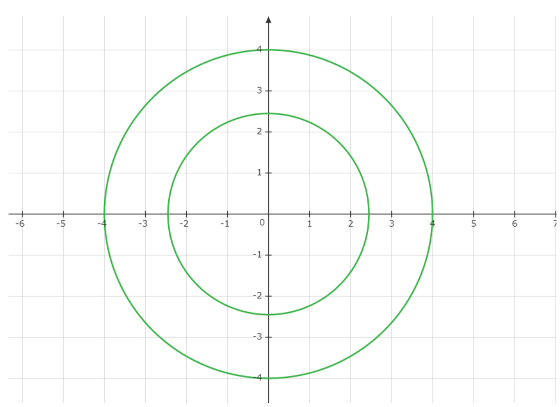


Luego, la superficie (lateral) de la región es la sección del paraboloide acotado entre dichos planos. Así, la superficie en cuestión es:

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, y = \frac{x^2+z^2}{2},\, 3 \leq y \leq 8\right\}$$

De esta forma, parametrizamos a la superficie S mediante la función $\vec{\Phi}$. Veamos que la superficie S impone una condición sobre la variable y. Por ende, nuestra parametización será con respecto a las variables x, z.

Veamos que la región a tratar es un paraboloide de sección transversal circular. Luego, la región D se trata de dos círculos concéntricos de radios $\sqrt{6}$ y 4.



Así, la parametrización de S corresponde a:

$$\vec{\Phi} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \,/$$

$$(x,z) \to \vec{\Phi}(x,z) = \begin{pmatrix} x \\ \\ \dfrac{x^2+z^2}{2} \\ \\ z \end{pmatrix} \,/\, D = \left\{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 6 \leq x^2+z^2 \leq 16\right\}$$

De esta forma, hallamos los vectores tangentes a la superficie S parametrizada por Φ:

$$\vec{T}_x(x,z) = \frac{\partial \vec{\Phi}(x,z)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ x \\ \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{T}_z(x,z) = \frac{\partial \vec{\Phi}(x,z)}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ z \\ \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego, hallamos el PVF:

$$\vec{T}_x(x,z) \times \vec{T}_z(x,z) = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \\ 1 & x & 0 \\ \\ 0 & z & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \\ -1 \\ \\ z \end{pmatrix}$$

De esta forma, hallamos la norma del vector normal:

$$||\vec{T}_x(x,z) \times \vec{T}_z(x,z)|| = \sqrt{(x)^2 + (-1)^2 + (z)^2} = \sqrt{(x^2+z^2)+1}$$

Seguidamente, el área de la superficie S es:

$$\iint_S 1 \cdot dS = \iint_D ||\vec{T}_x(x,z) \times \vec{T}_z(x,z)||\, dA = \iint_D \sqrt{(x^2+z^2)+1}\, dA$$

Aplicamos el siguiente cambio de coordenadas:

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ \\ z = r\sin(\theta) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} D = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 6 \leq x^2+z^2 \leq 16\} \\ \\ D^* = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \sqrt{6} \leq r \leq 4 \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\right\} \end{cases}$$

En tal sentido, tenemos que:

$$\iint_S dS = \int_{\sqrt{6}}^{4}\int_0^{2\pi} \sqrt{r^2+1}\,|r|\,d\theta dr = \pi\int_{\sqrt{6}}^{4} 2r\sqrt{r^2+1}\,dr = \frac{2\pi}{3}\cdot\left(\left(r^2+1\right)^{3/2}\Big|_{r=\sqrt{6}}^{r=4}\right.$$

$$\iint_S dS = \frac{2\pi}{3}\left(17^{3/2}-7^{3/2}\right)$$

Finalmente:

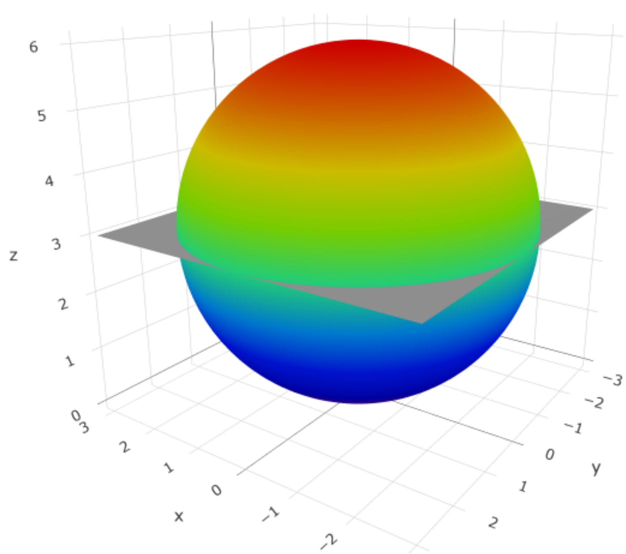
$$\boxed{A(S) = \iint_S dS = \frac{2\pi}{3}\left(17^{3/2}-7^{3/2}\right)}$$

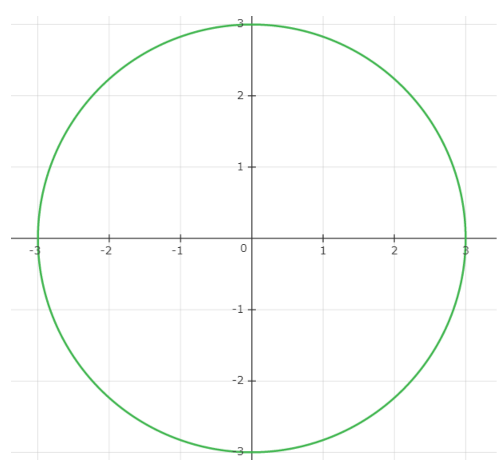
6. Halle el área de la superficie S tal que $S = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x^2+y^2+z^2 = 2Rz\,,\ z \geq \sqrt{x^2+y^2}\right\}$ con $R\in\mathbb{R}^+$.

Solución: En primer lugar, realizaremos una manipulación algebráica a la superficie S para detectar mejor la forma de la misma. Así:

$$x^2+y^2+z^2 = 2Rz \Longrightarrow x^2+y^2+z^2-2Rz+R^2 = R^2 \Longrightarrow x^2+y^2+(z-R)^2 = R^2$$

Entonces, se trata de una esfera centrada en el punto $(0,0,R)$ y de radio R. Luego, la superficie S es un hemisferio de la esfera, que se encuentra por encima del plano paralelo al plano xy y que pasa por el punto de intersección entre dicha región y un cono de ecuación $z=\sqrt{x^2+y^2}$, como se muestra en la figura.





Parametrizamos a la superficie S mediante la función $\vec{\Phi}$. Para ello, escogemos a las variables x y y como parámetros ya que la superficie S impone una condición sobre la variable z.

De esta forma, antes de parametrizar a la superficie S, realizamos el despeje de la variable z de la ecuación de la esfera. Luego, sustituiremos dicho despeje en la desigualdad que involuca a dicha variable. Así:

$$x^2+y^2+(z-R)^2=R^2 \Longrightarrow (z-R)^2=R^2-(x^2+y^2) \Longrightarrow |z-R|=\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}$$

$$\Longrightarrow z-R=\sqrt{R^2-(x^2+y^2)} \Longrightarrow z=R+\sqrt{R^2-(x^2+y^2)} \quad R^2-(x^2+y^2)\geq 0$$

Entonces:

$$z \geq \sqrt{x^2+y^2} \Longrightarrow R+\sqrt{R^2-(x^2+y^2)} \geq \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Longrightarrow \left(R+\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}\right)^2 \geq \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 \Longrightarrow R^2+2R\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}+R^2-(x^2+y^2) \geq x^2+y^2$$

$$\Longrightarrow R^2-(x^2+y^2)+R\sqrt{R^2-(x^2+y^2)} \geq 0 \Longrightarrow \sqrt{R^2-(x^2+y^2)}\left(\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}+R\right) \geq 0$$

$$\text{Como } \sqrt{R^2-(x^2+y^2)}+R \geq 0 \Longrightarrow \sqrt{R^2-(x^2+y^2)}\left(\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}+R\right) \geq 0 \Longrightarrow$$

$$\sqrt{R^2-(x^2+y^2)} \geq 0 \Longrightarrow x^2+y^2 \leq R^2$$

Entonces, la superficie S es equivalente a la siguiente representación:

$$S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/z=R+\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}\,,\,x^2+y^2\leq R^2\right\}$$

Así, la parametrización de S corresponde a:

$$\vec{\Phi}\,:\,D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3\,/$$

$$(x,y)\to\vec{\Phi}(x,y)=\begin{pmatrix} x \\ y \\ R+\sqrt{R^2-(x^2+y^2)} \end{pmatrix}\,/\,D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x^2+y^2\leq R^2\right\}$$

De esta forma, hallamos los vectores tangentes a la superficie S parametrizada por Φ:

$$\vec{T}_x(x,y) = \frac{\partial \vec{\Phi}(x,y)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\dfrac{x}{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}} \end{pmatrix} \quad \vec{T}_y(x,y) = \frac{\partial \vec{\Phi}(x,y)}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{y}{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}} \end{pmatrix}$$

Luego, hallamos el PVF:

$$\vec{T}_x(x,z) \times \vec{T}_z(x,z) = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{\imath}} & \hat{\mathbf{\jmath}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1 & 0 & -\dfrac{x}{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}} \\ 0 & 1 & -\dfrac{y}{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}} \\ \dfrac{y}{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hallamos la norma del vector normal:

$$||\vec{T}_x(x,y) \times \vec{T}_y(x,y)|| = \sqrt{\left(-\frac{x}{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}}\right)^2 + \left(-\frac{y}{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}}\right)^2 + 1} = \frac{R}{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}}$$

Seguidamente, el área de la superficie S es:

$$\iint_S 1 \cdot dS = \iint_D ||\vec{T}_x(x,y) \times \vec{T}_y(x,y)||\, dA$$

Sustituyendo los elementos anteriormente encontrados tenemos que:

$$\iint_S dS = \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}}\, dA$$

Aplicamos el siguiente cambio de coordenadas:

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2 \leq R^2\} \\ D^* = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \leq r \leq R \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\} \end{cases}$$

En tal sentido, tenemos que:

$$\iint_S dS = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}}\, |r|\, d\theta dr = 2\pi R \int_0^R \frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}}\, dr = -2\pi R \cdot \left(\sqrt{R^2-r^2}\right|_{r=0}^{r=R}$$

$$\iint_S dS = -2\pi R\,(0 - R) = 2\pi R^2$$

Finalmente:

$$\boxed{A(S) = \iint_S dS = 2\pi R^2}$$

4 Integración de Campos Escalares y Vectoriales

4.1 Integración de Campos Escalares

7. Sea el campo escalar $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \,/\, f(x,y,z) = x^2z + y^2z$. Hallar la integral de superficie $\iint_S f\, dS$, sabiendo que $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z \leq 0\right\}$.

Solución: Parametrizamos a la superficie S mediante la función $\vec{\Phi}$. Para ello, debemos "despejar" una de las tres variables x, y, z en función de otras dos. Veamos que la superficie S impone una condición sobre la variable z. Por ende, nuestra parametización será con respecto a las variables x, y. Así, tenemos que, según la superficie S:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \Longrightarrow z^2 = 4 - (x^2 + y^2) \Longrightarrow z = \pm\sqrt{4 - (x^2 + y^2)}$$

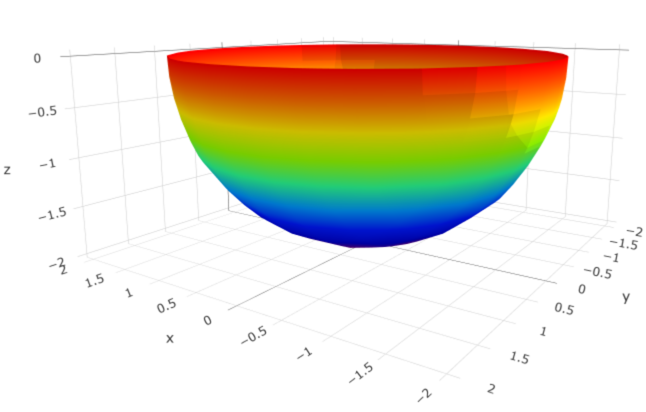
Recordando la condición de S, tenemos que:

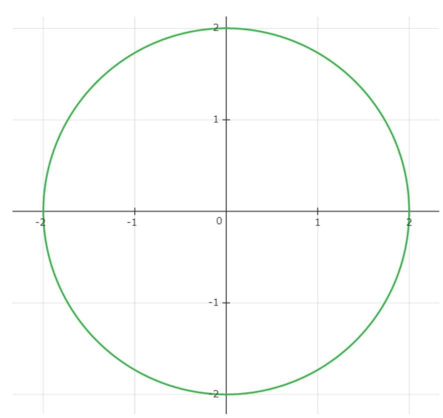
$$z = -\sqrt{4 - (x^2 + y^2)}$$

De esta forma, ahora solo queda garantizar que el argumento de la función raíz sea positivo. Esto es:

$$4 - (x^2 + y^2) \geq 0 \Longrightarrow x^2 + y^2 \leq 4$$

Analicemos el resultado obtenido. El enunciado del ejercicio nos muestra que la región a tratar es una esfera centrada en el origen de coordenadas y de radio igual a 2. Luego, la superficie S se trata la parte del cascaron inferior (negativo) de la esfera, cuya proyección en el plano xy es una región D que no es más que un círculo de radio igual a 2. Por lo tanto, lo obtenido corresponde con nuestro conocimiento básico de regiones en el espacio.





Entonces, volviendo a la parametrización de S tenemos que:

$$\vec{\Phi} \,:\, D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \,/$$

$$(x,y) \to \vec{\Phi}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ \\ y \\ \\ -\sqrt{4-(x^2+y^2)} \end{pmatrix} \,/\, D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2 \leq 4\right\}$$

De esta forma, hallamos los vectores tangentes a la superficie S parametrizada por Φ:

$$\vec{T}_x(x,y) = \frac{\partial \vec{\Phi}(x,y)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ 0 \\ \\ \dfrac{x}{\sqrt{4-(x^2+y^2)}} \end{pmatrix} \quad \vec{T}_y(x,y) = \frac{\partial \vec{\Phi}(x,y)}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 1 \\ \\ \dfrac{y}{\sqrt{4-(x^2+y^2)}} \end{pmatrix}$$

Luego, hallamos el producto vectorial fundamental (PVF) que no es más que el vector normal a la superficie S parametrizada por Φ:

$$\vec{T}_x(x,y) \times \vec{T}_y(x,y) = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \\ 1 & 0 & \dfrac{x}{\sqrt{4-(x^2+y^2)}} \\ 0 & 1 & \dfrac{y}{\sqrt{4-(x^2+y^2)}} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{x}{\sqrt{4-(x^2+y^2)}} \\ -\dfrac{y}{\sqrt{4-(x^2+y^2)}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

De esta forma, hallamos la norma del vector normal:

$$||\vec{T}_x(x,y) \times \vec{T}_y(x,y)|| = \sqrt{\left(-\frac{x}{\sqrt{4-(x^2+y^2)}}\right)^2 + \left(-\frac{y}{\sqrt{4-(x^2+y^2)}}\right)^2 + 1} =$$

$$= \sqrt{\frac{x^2+y^2}{4-(x^2+y^2)} + 1} = \sqrt{\frac{4}{4-(x^2+y^2)}} = \frac{2}{\sqrt{4-(x^2+y^2)}}$$

Seguidamente, evaluamos la parametrización $\vec{\Phi}$ en el campo escalar $f(x,y,z)$. Así:

$$f(\vec{\Phi}(x,y)) = -(x^2+y^2)\left(\sqrt{4-(x^2+y^2)}\right)$$

De esta forma, la integral de superficie S del campo escalar f es:

$$\iint_S f\,dS = \iint_D f(\vec{\Phi}(x,y))\,||\vec{T}_x(x,y)\times\vec{T}_y(x,y)||\,dA$$

Sustituyendo los elementos anteriormente encontrados tenemos que:

$$\iint_S f\,dS = \iint_D -(x^2+y^2)\left(\sqrt{4-(x^2+y^2)}\right)\frac{2}{\sqrt{4-(x^2+y^2)}}\,dA = -2\iint_D (x^2+y^2)\,dA$$

Aplicamos el siguiente cambio de coordenadas:

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos(\theta) \\ \\ y = r\sin(\theta) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x^2+y^2\leq 4\} \\ \\ D^* = \{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2\,/\,0\leq r\leq 2 \quad 0\leq\theta\leq 2\pi\} \end{array}\right.$$

En tal sentido, tenemos que:

$$\iint_S f\,dS = -2\int_0^2\int_0^{2\pi} r^2|r|\,d\theta dr = -2\cdot 2\pi\int_0^2 r^3\,dr = -\pi\left(r^4\Big|_{r=0}^{r=2} = -16\pi\right.$$

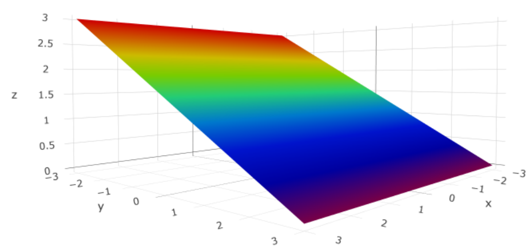
Finalmente:

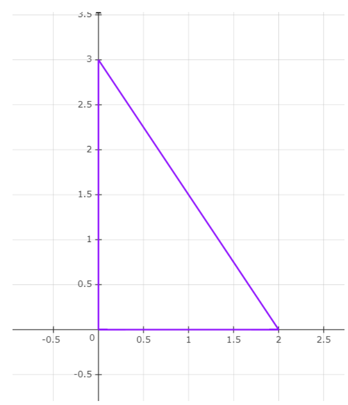
$$\boxed{\iint_S f\,dS = -16\pi}$$

4.2 Integración de Campos Vectoriales

8. Sea el campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \,/\, \vec{F}(x, y, z) = (x, xy, xz)$. Hallar la integral de superficie $\displaystyle\iint_{S\uparrow} < \vec{F}\,,\, d\vec{S} >$, sabiendo que $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/3x + 2y + z = 6,\ x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ z \geq 0\right\}$ orientada con una normal de tercera componente negativa.

Solución: La superficie S se trata de la porción del plano $3x + 2y + z = 6$ que se encuentra en el primer cuadrante, como se puede ver en la figura.





Parametrizamos a la superficie S mediante la función $\vec{\Phi}$. Para ello, nuestra parametización será con respecto a las variables x, y, tal que:

$$\vec{\Phi} \,:\, D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \,/$$

$$(x, y) \to \vec{\Phi}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 6 - 3x - 2y \end{pmatrix} \,/\, D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \geq 0\,, \quad y \geq 0\,, \quad 6 - 3x - 2y \geq 0\right\}$$

De esta forma, hallamos los vectores tangentes a la superficie S parametrizada por Φ:

$$\vec{T}_x(x, y) = \frac{\partial \vec{\Phi}(x, y)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \vec{T}_y(x, y) = \frac{\partial \vec{\Phi}(x, y)}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Luego, hallamos el PVF:

$$\vec{T}_x(x,y) \times \vec{T}_y(x,y) = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \uparrow$$

Veamos que $\uparrow$ es la orientación inducida por la parametrización $\vec{\Phi}(x,y)$ de la superficie S. Seguidamente, evaluamos la parametrización $\vec{\Phi}$ en el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z)$. Así:

$$\vec{F}(\vec{\Phi}(x,y)) = \begin{pmatrix} x \\ xy \\ x(6-3x-2y) \end{pmatrix}$$

De esta forma, la integral de superficie S del campo vectorial $\vec{F}$ es:

$$\iint_{S^{\uparrow}} < \vec{F}\,,\, d\vec{S} >= \iint_D < \vec{F}(\vec{\Phi}(x,y))\,,\, \vec{T}_x(x,y) \times \vec{T}_y(x,y) > \, dA$$

$$\iint_{S^{\uparrow}} < \vec{F}\,,\, d\vec{S} >= \iint_D < \begin{pmatrix} x \\ xy \\ x(6-3x-2y) \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} > \, dA = \iint_D 3x + 2xy + 6x - 3x^2 - 2xy \, dA =$$

$$= \iint_D 9x - 3x^2 \, dA$$

Luego, refiriendonos a la figura mostrada anteriormente sobre la superficie S y la región D encontramos los límites de integración:

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \leq x \leq 2\,, \quad 0 \leq y \leq 3 - \frac{3}{2}x \right\}$$

De esta forma, tenemos que:

$$\iint_{S^{\uparrow}} < \vec{F}\,,\, d\vec{S} >= \int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}x} 9x - 3x^2 \, dydx = \int_0^2 \left(9x - 3x^2\right) \left(3 - \frac{3}{2}x\right) \, dx = 9 \int_0^2 3x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 \, dx =$$

$$= 9 \left(3\frac{x^2}{2} - \frac{5}{6}x^3 + \frac{1}{8}x^4 \right|_{x=0}^{x=2} = 36 \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{3} + \frac{1}{2} \right) = 12$$

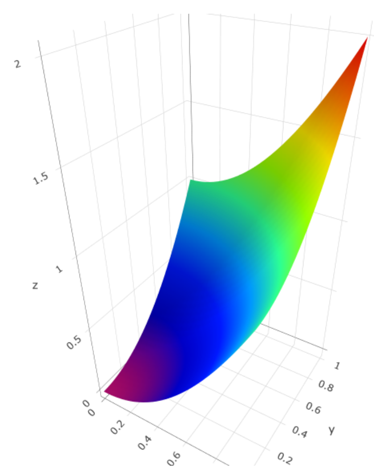
Luego, debe compararse las orientaciones $\uparrow$ y $\uparrow$. $\uparrow$ se encuentra orientada con una normal de tercera componente negativa, mientras que $\uparrow$ tiene una tercera componente positiva. Es decir, ambas orientaciónes son contrarias. Por lo tanto:

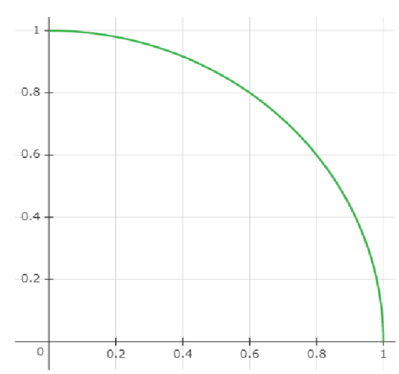
$$\boxed{\iint_{S^{\uparrow}} < \vec{F}\, , \, \vec{dS} >= -12}$$

9. Sea el campo vectorial $F \,:\, \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \,/\, \vec{F}(x,y,z) = (e^y, x, x^2y)$. Hallar la integral de superficie $\displaystyle\iint_{S^{\uparrow}} < \vec{F}\, , \, \vec{dS} >$, sabiendo que $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z = x^2+y^2,\, 0 \leq x \leq 1\, ,\, 0 \leq y \leq 1\right\}$ y se encuentra orientada con una normal que apunta hacia la región de valores crecientes de $\phi \,:\, \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \,/\, \phi(x,y,z) = x^2+y^2-z$

Solución: Parametrizamos a la superficie S mediante la función $\vec{\Phi}$. Para ello, debemos "despejar" una de las tres variables x, y, z en función de otras dos. Veamos que en la definición de la superficie S ya se encuentra despejada la variable z. Por ende, nuestra parametización será con respecto a las variables x, y.

La región a tratar es paraboloide de sección circular centrado en el origen de coordenadas. Luego, la superficie S se trata de la parte de la superficie lateral del paraboloide desde $z = 0$ hasta $z = 1$, cuya proyección en el plano xy es la región del primer cuadrante de un circulo de radio igual a la unidad y centrado en el origen de coordenadas.





Entonces, volviendo a la parametrización de S tenemos que:

$$\vec{\Phi} \,:\, D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \,/$$

$$(x,y) \to \vec{\Phi}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ \\ y \\ \\ x^2+y^2 \end{pmatrix} \,/\, D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \le x \le 1 \;\; 0 \le y \le 1\right\}$$

De esta forma, hallamos los vectores tangentes a la superficie S parametrizada por Φ:

$$\vec{T}_x(x,y) = \frac{\partial \vec{\Phi}(x,y)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ 0 \\ \\ 2x \end{pmatrix} \quad \vec{T}_y(x,y) = \frac{\partial \vec{\Phi}(x,y)}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 1 \\ \\ 2y \end{pmatrix}$$

Luego, hallamos el PVF:

$$\vec{T}_x(x,y) \times \vec{T}_y(x,y) = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \\ 1 & 0 & 2x \\ \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ \\ -2y \\ \\ 1 \end{pmatrix} \uparrow$$

Veamos que $\uparrow$ es la orientación inducida por la parametrización $\vec{\Phi}(x,y)$ de la superficie S. Esta nueva orientación debe compararse con la dada por el enunciado del problema. Seguidamente, evaluamos la parametrización $\vec{\Phi}$ en el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z)$. Así:

$$\vec{F}(\vec{\Phi}(x,y)) = \begin{pmatrix} e^y \\ \\ x \\ \\ x^2 y \end{pmatrix}$$

De esta forma, la integral de superficie S del campo vectorial $\vec{F}$ es:

$$\iint_{S^{\uparrow}} < \vec{F}\,,\, d\vec{S} >= \iint_D < \vec{F}(\vec{\Phi}(x,y))\,,\, \vec{T}_x(x,y) \times \vec{T}_y(x,y) > \, dA$$

Sustituyendo los elementos anteriormente encontrados tenemos que:

$$\iint_{S^{\uparrow}} < \vec{F}\,,\, d\vec{S} >= \iint_D < \begin{pmatrix} e^y \\ \\ x \\ \\ x^2 y \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -2x \\ \\ -2y \\ \\ 1 \end{pmatrix} > \, dA = \iint_D -2xe^y - 2xy + x^2 y \, dA$$

Aplicamos el siguiente cambio de coordenadas:

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos(\theta) \\ \\ y = r\sin(\theta) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \leq x \leq 1 \,,\, 0 \leq y \leq 1\} \\ \\ D^{*} = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \leq r \leq 1 \,,\, 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}\right\} \end{array}\right.$$

En tal sentido, se procede a realizar la doble integración de forma sencilla:

$$\iint_{S^{\uparrow}} < \vec{F} \,,\, d\vec{S} >= -2\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cos(\theta)e^{\sin(\theta)} r \, d\theta dr - 2\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cos(\theta) r\sin(\theta) r \, d\theta dr +$$

$$+ \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r\cos(\theta))^2 r\sin(\theta) r \, d\theta dr =$$

$$= -2\left(\frac{r^3}{3}\right|_{r=0}^{r=1}\left(e^{\sin(\theta)}\right|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} - 2\left(\frac{r^4}{4}\right|_{r=0}^{r=1}\left(\frac{\sin^2(\theta)}{2}\right|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} - \left(\frac{r^5}{5}\right|_{r=0}^{r=1}\left(\frac{\cos^3(\theta)}{3}\right|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{2}{3}(e-1) - \frac{1}{4} + \frac{1}{15} = \frac{29}{60} - \frac{2e}{3} \Longrightarrow \iint_{S^{\uparrow}} < \vec{F} \,,\, d\vec{S} >= \frac{29}{60} - \frac{2e}{3}$$

Luego, debe compararse las orientaciones $\uparrow$ y $\uparrow$. Así, la primera se encuentra orientada hacia los valores crecientes del campo escalar ϕ. En otras palabras, la superficie S se encuentra orientada en la dirección del gradiente ϕ. Entonces, para todo punto $P \in S$, tenemos:

$$\vec{\nabla}\phi(P) = \begin{pmatrix} 2x_P \\ \\ 2y_P \\ \\ -1 \end{pmatrix}$$

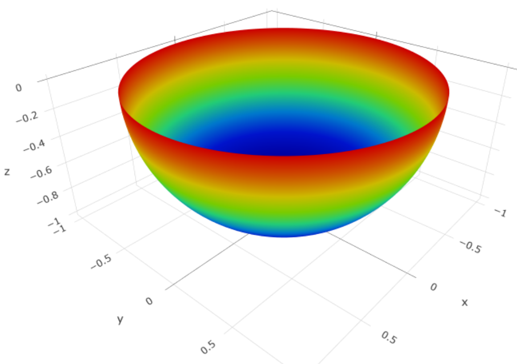
Este gradiente apunta hacia al exterior de la superficie S. Por ende, es paralelo a la normal de la superficie.

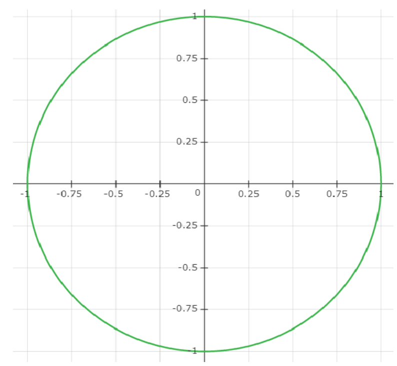
Por otro lado, la parametrización $\uparrow$ resulta en la dirección contraria del $\vec{\nabla}\phi(P)$. Es decir, ambas orientaciónes son contrarias. Por lo tanto, debemos cambiar el signo de la integral de superficie calculada en el paso final anterior. Finalmente:

$$\boxed{\iint_{S^{\uparrow}} < \vec{F} \,,\, d\vec{S} >= \frac{2e}{3} - \frac{29}{60}}$$

10. Sea el campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \,/\, \vec{\nabla} \times \vec{F}(x,y,z) = \Big(x, y - xz, e^{x^2+y^2} - 2z\Big)$. Hallar la integral de superficie $\displaystyle\iint_{S^{\uparrow}} < \vec{\nabla} \times \vec{F} \,,\, d\vec{S} >$, sabiendo que $S = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad z \leq 0\big\}$ y se encuentra orientada con una normal de tercera componente negativa.

Solución: Veamos que la superficie S se trata de la mitad negativa de una esfera centrada en $(0,0,0)$ y radio igual a la unidad, como se muestra en la figura.





Luego, parametrizamos a la superficie S mediante la función $\vec{\Phi}$. Para ello, usaremos las variables x y y como los parámetros de dicha función. Por ende, despejaremos de la ecuación de la esfera la variable z. Así, tenemos que:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Longrightarrow z^2 = 1 - (x^2 + y^2) \Longrightarrow |z| = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \Longrightarrow z = -\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$$

Luego, tenemos que se trata del hemisferio negativo de la esfera, entonces:

$$z \leq 0 \Longrightarrow -\sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \leq 0 \Longrightarrow 1 - (x^2 + y^2) \geq 0 \Longrightarrow x^2 + y^2 \leq 1$$

De esta forma, tenemos que la superficie S tiene la siguiente representación:

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z = -\sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \quad x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

Entonces, volviendo a la parametrización de S tenemos que:

$$\vec{\Phi} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \,/$$

$$(x,y) \to \vec{\Phi}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ \\ y \\ \\ -\sqrt{1-(x^2+y^2)} \end{pmatrix} \;/\; D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2 \leq 1\right\}$$

De esta forma, hallamos los vectores tangentes a la superficie S parametrizada por Φ:

$$\vec{T}_x(x,y) = \frac{\partial \vec{\Phi}(x,y)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ 0 \\ \\ \dfrac{x}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}} \end{pmatrix} \quad \vec{T}_y(x,y) = \frac{\partial \vec{\Phi}(x,y)}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 1 \\ \\ \dfrac{y}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}} \end{pmatrix}$$

Luego, hallamos el PVF:

$$\vec{T}_x(x,y) \times \vec{T}_y(x,y) = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \\ 1 & 0 & \dfrac{x}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}} \\ 0 & 1 & \dfrac{y}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{x}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}} \\ -\dfrac{y}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}} \\ 1 \end{pmatrix} \uparrow$$

Veamos que $\uparrow$ es la orientación inducida por la parametrización $\vec{\Phi}(x,y)$ de la superficie S. Esta nueva orientación debe compararse con la dada por el enunciado del problema.

Seguidamente, evaluamos la parametrización $\vec{\Phi}$ en el campo vectorial $\vec{\nabla} \times \vec{F}(x,y,z)$. Así:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{\Phi}(x,y)) = \begin{pmatrix} x \\ \\ y + x\sqrt{1-(x^2+y^2)} \\ \\ e^{x^2+y^2} + 2\sqrt{1-(x^2+y^2)} \end{pmatrix}$$

De esta forma, la integral de superficie S del campo vectorial $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ es:

$$\iint_{S\uparrow} < \vec{\nabla} \times \vec{F} \,,\, d\vec{S} >= \iint_D < \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{\Phi}(x,y)) \,,\, \vec{T}_x(x,y) \times \vec{T}_y(x,y) > \, dA$$

Sustituyendo los elementos anteriormente encontrados tenemos que:

$$\iint_{S^{\uparrow}} < \vec{\nabla}\times\vec{F}\,,\, d\vec{S} >= \iint_D < \begin{pmatrix} x \\ y + x\sqrt{1-(x^2+y^2)} \\ e^{x^2+y^2} + 2\sqrt{1-(x^2+y^2)} \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -\dfrac{x}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}} \\ -\dfrac{y}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}} \\ 1 \end{pmatrix} > dA$$

$$= \iint_D -\frac{x^2}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}} - \frac{y^2}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}} - xy + e^{x^2+y^2} + 2\sqrt{1-(x^2+y^2)}\, dA$$

$$= \iint_D \frac{2-3(x^2+y^2)}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}} - xy + e^{x^2+y^2}\, dA$$

Aplicamos el siguiente cambio de coordenadas:

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2 \leq 1\} \\ D^* = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \leq r \leq 1\,,\, 0 \leq \theta \leq 2\pi\} \end{cases}$$

En tal sentido, se procede a realizar la doble integración de forma sencilla:

$$\iint_{S^{\uparrow}} < \vec{\nabla}\times\vec{F}\,,\, d\vec{S} >= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{2-3r^2}{\sqrt{1-r^2}} - \frac{1}{2}r^2\sin(2\theta) + e^{r^2} \right) r\, d\theta dr$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{2r}{\sqrt{1-r^2}}}_{I_1} - \underbrace{\frac{3r^3}{\sqrt{1-r^2}}}_{I_2} - \underbrace{\frac{1}{2}r^3\sin(2\theta)}_{I_3} + \underbrace{re^{r^2}}_{I_4}\, d\theta dr$$

$$I_1 = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{2r}{\sqrt{1-r^2}}\, d\theta dr = 2\cdot 2\pi \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\, dr = 4\pi \left(-\sqrt{1-r^2} \right|_{r=0}^{r=1} = 4\pi$$

$$I_2 = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{3r^3}{\sqrt{1-r^2}}\, d\theta dr = 3\cdot 2\pi \int_0^1 \frac{r^3}{\sqrt{1-r^2}}\, dr \quad CV \begin{cases} r = \sin(t) \Longrightarrow dr = \cos(t)\, dt \\ \text{Si}\, r = 0 \Longrightarrow t = 0 \\ \text{Si}\, r = 1 \Longrightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$I_2 = 6\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3(t)\cos(t)}{\sqrt{1-\sin^2(t)}}\, dt = 6\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t)\, dt = 6\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)(1-\cos^2(t))\, dt$$

$$= 6\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) - \cos^2(t)\sin(t)\, dt = 6\pi \left(\left(-\cos(t)\right|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} + \left(\frac{1}{3}\cos^3(t) \right|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} \right) = 6\pi\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 4\pi$$

$$I_3 = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^3 \sin(2\theta)\, d\theta dr = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 r^3 \left(\cos(2\theta)\right|_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\, dr = 0$$

$$I_4 = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r e^{r^2}\, d\theta dr = 2\pi \int_0^1 r e^{r^2}\, dr = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \left(e^{r^2} \right|_{r=0}^{r=1} = \pi(e-1)$$

Luego, tenemos que:

$$\iint_{S^{\color{blue}\uparrow}} < \vec{\nabla} \times \vec{F} \,,\, d\vec{S} >= I_1 - I_2 - I_3 + I_4 = 4\pi - 4\pi + 0 + \pi(e-1) = \pi(e-1)$$

Entonces:

$$\iint_{S^{\color{blue}\uparrow}} < \vec{\nabla} \times \vec{F} \,,\, d\vec{S} >= \pi(e-1)$$

Luego, debe compararse las orientaciones ${\color{red}\uparrow}$ y ${\color{blue}\uparrow}$. Así, la primera se encuentra orientada con una normal con tercera componente negativa. Por otro lado, la parametrización ${\color{blue}\uparrow}$ resulta con tercera componente positiva. Es decir, ambas orientaciónes son contrarias.

Por lo tanto, debemos cambiar el signo de la integral de superficie calculada en el paso final anterior. Finalmente:

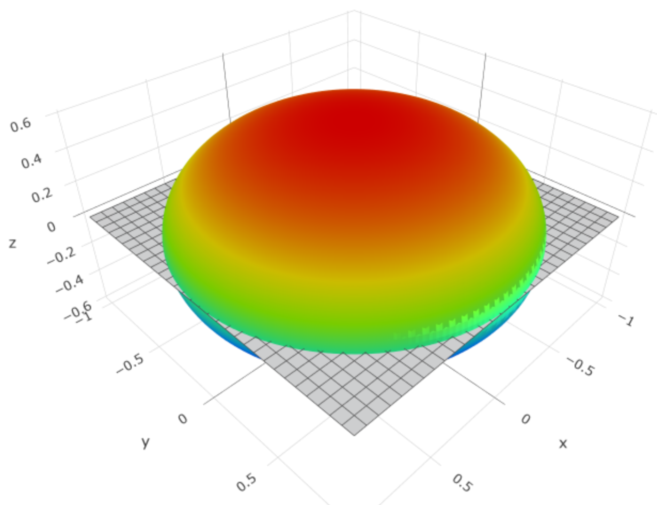
$$\boxed{\iint_{S^{\color{red}\uparrow}} < \vec{\nabla} \times \vec{F} \,,\, d\vec{S} >= \pi(1-e)}$$

5 Teorema de Stokes y Gauss

11. Sea el campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \,/\, \vec{F}(x,y,z) = (y, -x, zx^3y^2)$. Hallar la integral de superficie $\displaystyle\iint_{S^{\uparrow}} < \vec{\nabla} \times \vec{F}\,, \vec{dS} >$, sabiendo que $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + 3z^2 = 1,\ z \leq 0\right\}$ y se encuentra orientada con una normal de tercera componente negativa.

Solución:

Veamos que la superficie S se trata la parte "negativa" de un elipsoide centrado en el eje de coordenadas con longitudes de semiejes iguales a $1, 1, \frac{1}{\sqrt{3}}$ respectivamente.



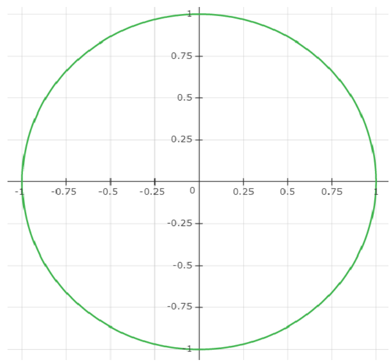
Alternativa 1: Teorema de Stokes

En primer lugar, debe definirse la frontera de la superficie S. Luego, $front\, S$ es el "borde" circular del elipsoide en el plano $z = 0$. Es decir:

$$front\, S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + 3z^2 = 1,\ z = 0\right\}$$

Simplificando la descripción de dicha superficie tenemos:

$$front\, S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\right\}$$



Una vez definida la frontera de la superficie S, se estudia al campo vectorial $\vec{F}$. Por simple inspección, el campo vectorial $\vec{F}$ es producto de la composición de funciones de tipo polinómica, las cuales son de clase $C^n(\mathbb{R})$. Por ende, podemos garantizar que $\vec{F}$ es, al menos, de clase $C^1(\mathbb{R}^3)$ y, por lo tanto, también es de clase $C^1(S \cup \mathit{front}\, S)$

Así, podemos aplicar el teorema de Stokes de la siguiente manera:

$$\int_{\mathit{front}\, S^{\uparrow}} < \vec{F}\,,\, \vec{ds} > = \iint_{S^{\uparrow}} < \vec{\nabla} \times \vec{F}\,,\, \vec{dS} >$$

La orientación $\uparrow$ es tal que que la $\mathit{front}\, S$ debe ser recorrida de acuerdo a la regla de la mano derecha.

Ahora, solo queda calcular la integral de línea del campo vectorial $\vec{F}$ a lo largo de la curva cerrada, simple y suave de $\mathit{front}\, S$. Para ello, procedemos a parametrizar dicha curva:

$$\mathit{front}\, S \;:\; \vec{\sigma}(t) = \left\{ t \in \mathbb{R} \,/ \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \\ \sin(t) \\ \\ 0 \end{pmatrix} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \right\} \quad \uparrow$$

Hallamos el vector tangente a la curva $\mathit{front}\, S$:

$$\vec{\sigma'}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \\ \cos(t) \\ \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego, evaluamos la parametrización $\vec{\sigma}$ en el campo vectorial $\vec{F}$:

$$\vec{F}(\vec{\sigma}(t)) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \\ -\cos(t) \\ \\ 0 \end{pmatrix}$$

De esta forma, la integral de línea del campo vectorial $\vec{F}$ sobre la curva $front\, S$ es:

$$\int_{front\, S^{\uparrow}} < \vec{F}\, ,\, \vec{ds} > = \int_a^b < \vec{F}(\vec{\sigma}(t))\, ,\, \vec{\sigma'}(t) > \, dt$$

Sustituyendo los elementos anteriormente encontrados tenemos que:

$$\int_{front\, S^{\uparrow}} < \vec{F}\, ,\, \vec{ds} > = \int_0^{2\pi} < \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \\ -\cos(t) \\ \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \\ \cos(t) \\ \\ 0 \end{pmatrix} > \, dt = \int_0^{2\pi} -\sin^2(t) - \cos^2(t)\, dt =$$

$$= -\int_0^{2\pi} \, dt = -2\pi$$

Así, tenemos que:

$$\int_{front\, S^{\uparrow}} < \vec{F}\, ,\, \vec{ds} > = -2\pi$$

Ahora, queda comparar entre la orientaciones $\uparrow$ y $\uparrow$ sobre la curva $front\, S$.

Veamos que $\uparrow$ es la orientación del teorema de Stokes. Esta debe ser tal que la curva $front\, S$ debe ser recorrida siguiendo la regla de la mano derecha. Sabiendo que dicha curva es una circunferencia centrada en el origen de coordenadas y de radio igual a la unidad, entonces la orientación de Stokes resulta en sentido antihorario.

Luego, la parametrización $\uparrow$, de acuerdo a la definición dada anteriormente, también posee el mismo sentido de recorrido de $\uparrow$. Por lo tanto:

$$\int_{front\, S^{\uparrow}} < \vec{F}\, ,\, \vec{ds} > = \int_{front\, S^{\uparrow}} < \vec{F}\, ,\, \vec{ds} > \Longrightarrow \int_{front\, S^{\uparrow}} < \vec{F}\, ,\, \vec{ds} > = -2\pi$$

Así, resta por comparar las orientaciones $\uparrow$ y $\uparrow$ sobre la superficie S.

Veamos que $\uparrow$, por ser la orientación del teorema de Stokes, esta posee una tercera componente positiva (debido a lo definido para la $front\, S$). Luego, $\uparrow$ posee una tercera componente negativa. Por lo tanto, ambas parametrizaciones son contrarias. Así:

$$\int_{front\, S^{\uparrow}} < \vec{F}\,,\, \vec{ds} > = -\int_{front\, S^{\uparrow}} < \vec{F}\,,\, \vec{ds} > \Longrightarrow \int_{front\, S^{\uparrow}} < \vec{F}\,,\, \vec{ds} > = 2\pi$$

Finalmente:

$$\boxed{\iint_{S^{\uparrow}} < \vec{\nabla} \times \vec{F}\,,\, \vec{dS} > = 2\pi}$$

Alternativa 2: Teorema de Gauss

Definimos a la región Ω y front Ω, donde Ω es el volumen que se encuentra por debajo del eje z del elipsoide y front Ω es la "tapa" que corresponde a la intersección del sólido y el plano $z = 0$. Por lo tanto, tenemos que:

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + 3z^2 \leq 1,\ z \leq 0\right\}$$

$$\text{front}\, \Omega = \ S \cup \underbrace{\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + 3z^2 \leq 1,\ z = 0\right\}}_{\Sigma}$$

Por otro lado, el campo vectorial $\vec{F}$ es producto de la composición de funciones de tipo polinómica, las cuales son de clase $C^n(\mathbb{R})$. Por ende, podemos garantizar que $\vec{F}$ es, al menos, de clase $C^2(\mathbb{R}^3)$ y, por lo tanto, también es de clase $C^1(\Omega \cup \text{front}\, \Omega)$. Así, tenemos todas las condiciones necesarias para aplicar el teorema de Gauss:

$$\iiint_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right)\ , dV \ = \iint_{\text{front}\, \Omega^{\uparrow}} < \vec{\nabla} \times \vec{F}\,,\, \vec{dS} >$$

donde $\uparrow$ está orientada hacia el exterior de Ω.
Notemos que:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) = 0$$

Por lo tanto, se tiene:

$$\iiint_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \, dV = 0$$

Así, tenemos que:

$$\iint_{\text{front}\,\Omega\uparrow} < \vec{\nabla} \times \vec{F} \, , \, d\vec{S} >= \iint_{S\uparrow} < \vec{\nabla} \times \vec{F} \, , \, d\vec{S} > + \iint_{\Sigma\uparrow} < \vec{\nabla} \times \vec{F} \, , \, d\vec{S} >= 0$$

Despejando se tiene:

$$\iint_{S\uparrow} < \vec{\nabla} \times \vec{F} \, , \, d\vec{S} >= - \iint_{\Sigma\uparrow} < \vec{\nabla} \times \vec{F} \, , \, d\vec{S} >$$

Se concluye que la integral de superficie del campo vectorial $\vec{F}$ del problema (orientada en la dirección $\uparrow$) es el negativo de la integral de superficie a través de la superficie Σ.
Por simple inspección se evidencia que:

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0 \, , \, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

Luego, procedemos a parametrizar dicha superficie a través de Φ

$$\vec{\Phi} \, : \, D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \, /$$

$$(x, y) \to \vec{\Phi}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \, / \, D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, / \, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

De esta forma, hallamos los vectores tangentes a la superficie Σ parametrizada por Φ:

$$\vec{T}_x(x, y) = \frac{\partial \vec{\Phi}(x, y)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{T}_y(x, y) = \frac{\partial \vec{\Phi}(x, y)}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego, hallamos el PVF:

$$\vec{T}_x(x, y) \times \vec{T}_y(x, y) = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \uparrow$$

Veamos que $\uparrow$ es la orientación inducida por la parametrización $\vec{\Phi}(x,y)$ de la superficie Σ. Esta nueva orientación debe compararse con la del teorema de Gauss.
Por otro lado, hallamos $\vec{\nabla} \times \vec{F}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & zx^3y^2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2x^3yz \\ -3x^2y^2z \\ -2 \end{pmatrix}$$

Seguidamente, evaluamos la parametrización $\vec{\Phi}$ en el campo vectorial $\vec{\nabla} \times \vec{F}(x,y,z)$. Así:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{\Phi}(x,y)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

De esta forma, la integral de superficie Σ del campo vectorial $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ es:

$$\iint_{\Sigma\uparrow} < \vec{\nabla} \times \vec{F}\,,\, d\vec{S} >= \iint_D < \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{\Phi}(x,y))\,,\, \vec{T}_x(x,y) \times \vec{T}_y(x,y) > \, dA$$

Sustituyendo:

$$\iint_{\Sigma\uparrow} < \vec{\nabla}\times\vec{F}\,,\, d\vec{S} >= \iint_D < \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} > dA = \iint_D -2\, dA = -2\iint_D dA = -2A(D)$$

donde $A(D)$ es el área de la región D, la cual es un círculo de radio $r = 1$. Así:

$$A(D) = \pi \cdot (1)^2 = \pi$$

Luego, tenemos que:

$$\iint_{\Sigma\uparrow} < \vec{\nabla} \times \vec{F}\,,\, d\vec{S} >= -2\pi$$

Ahora, queda comparar entre la orientaciones $\uparrow$ y $\uparrow$ sobre la superficie Σ.

${\color{orange}\uparrow}$ es la orientación del teorema de Gauss, la cual apunta hacia el exterior de la superficie en cuestión. Para el caso de Σ, esta dirección es la misma que $\hat{\mathbf{k}}$. Luego, la parametrización ${\color{red}\uparrow}$, también posee la misma dirección de ${\color{orange}\uparrow}$. Por lo tanto:

$$\int_{\Sigma{\color{red}\uparrow}} < \vec{\nabla} \times \vec{F} \,,\, d\vec{S} > = \int_{\Sigma{\color{orange}\uparrow}} < \vec{\nabla} \times \vec{F} \,,\, d\vec{S} > \Longrightarrow \int_{\Sigma{\color{orange}\uparrow}} < \vec{\nabla} \times \vec{F} \,,\, d\vec{S} > = -2\pi$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$\iint_{S{\color{orange}\uparrow}} < \vec{\nabla} \times \vec{F} \,,\, d\vec{S} >= -(-2\pi) = 2\pi$$

Luego, resta por comparar las orientaciones ${\color{orange}\uparrow}$ y ${\color{blue}\uparrow}$ sobre la superficie S.

Veamos que ${\color{orange}\uparrow}$, por ser la orientación del teorema de Gauss, esta posee una tercera componente negativa sobre la superficie S. Por otro lado, por requisito del problema, ${\color{blue}\uparrow}$ posee una tercera componente negativa. Por lo tanto, ambas parametrizaciones poseen la misma dirección. Así:

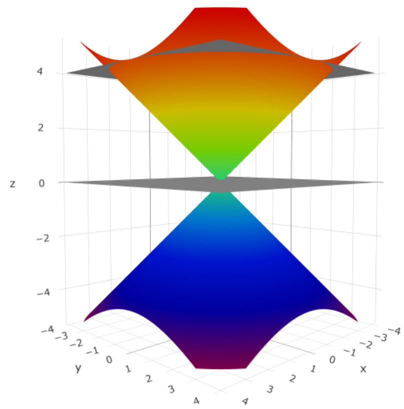
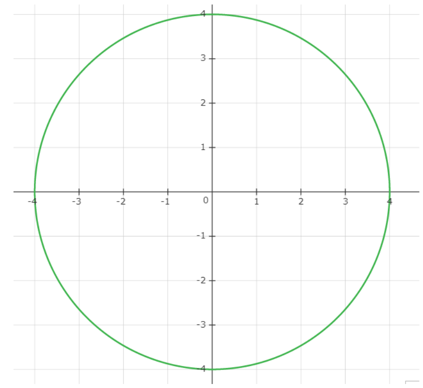
$$\int_{S{\color{blue}\uparrow}} < \vec{\nabla} \times \vec{F} \,,\, d\vec{S} > = \int_{S{\color{orange}\uparrow}} < \vec{\nabla} \times \vec{F} \,,\, d\vec{S} > \Longrightarrow \int_{S{\color{blue}\uparrow}} < \vec{\nabla} \times \vec{F} \,,\, d\vec{S} > = 2\pi$$

Finalmente:

$$\boxed{\iint_{S{\color{blue}\uparrow}} < \vec{\nabla} \times \vec{F} \,,\, d\vec{S} >= 2\pi}$$

12. Sea el campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \,/\, \vec{F}(x,y,z) = (y^3, x+z^2, z+y^2)$. Hallar la integral de superficie $\displaystyle\iint_{S{\color{blue}\uparrow}} < \vec{F} \,,\, d\vec{S} >$, sabiendo que $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z^2 - x^2 - y^2 = 0 \quad 0 \leq z \leq 4\right\}$ y se encuentra orientada hacia los valores crecientes de $\Psi(x,y,z) = z - \sqrt{x^2+y^2}$.

Solución: Veamos que la superficie S se trata de una sección positiva de un cono semi-infinito centrado en $(0,0,0)$, como se muestra en la figura.

Alternativa 1: Teorema de Gauss

Definimos a la región Ω y $\text{front}\,\Omega$, donde Ω es el volumen que se encuentra dentro de la porción del cono y $\text{front}\,\Omega$ es la superficie (lateral) S y la "tapa" que corresponde a la intersección del cono y el plano $z = 4$. Por lo tanto, tenemos que:

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z^2 - x^2 - y^2 \leq 0,\, 0 \leq z \leq 4\right\}$$

$$\text{front}\,\Omega = \; S \cup \underbrace{\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z^2 - x^2 - y^2 \leq 0,\, z = 4\right\}}_{\Sigma}$$

Luego, el campo vectorial $\vec{F}$ son funciones de tipo polinómica, las cuales son de clase $C^n(\mathbb{R})$. Por ende, podemos garantizar que $\vec{F}$ es, al menos, de clase $C^1(\Omega \cup \text{front}\,\Omega)$. Aplicando el teorema de Gauss, tenemos que:

$$\iiint_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{F}\, dV \;=\; \iint_{\text{front}\,\Omega\uparrow} < \vec{F}\,, d\vec{S} >$$

donde $\uparrow$ está orientada hacia el exterior de Ω.
Notemos que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 0 + 0 + 1 = 1$$

Por lo tanto, se tiene:

$$\iiint_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{F}\, dV = \iiint_{\Omega} 1\, dV = V(\Omega)$$

donde $V(\Omega)$ es el volumen de un cono de radio $r = 4$ y altura $h = 4$. Así, se tiene que

$$\iint_{\text{front}\,\Omega^{\uparrow}} < \vec{F}\, d\vec{S} >= \iint_{S^{\uparrow}} < \vec{F}\,,\, d\vec{S} > + \iint_{\Sigma^{\uparrow}} < \vec{F}\,,\, d\vec{S} >= \frac{\pi \cdot (4^2) \cdot (4)}{3} = \frac{64\pi}{3}$$

Despejando la integral de superficie de interés se tiene que:

$$\iint_{S^{\uparrow}} < \vec{F}\,,\, d\vec{S} >= \frac{64\pi}{3} - \iint_{\Sigma^{\uparrow}} < \vec{F}\,,\, d\vec{S} >$$

Luego, debemos calcular la integral de superficie a través de Σ.
Por simple inspección se evidencia que:

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 4\,,\, x^2 + y^2 \leq 16\right\}$$

Así, procedemos a parametrizar dicha superficie a través de Φ

$$\vec{\Phi}\ :\ D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\,/$$

$$(x, y) \to \vec{\Phi}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 4 \end{pmatrix}\ / \, D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,/\,x^2 + y^2 \leq 16\right\}$$

De esta forma, hallamos los vectores tangentes a la superficie Σ parametrizada por Φ:

$$\vec{T}_x(x, y) = \frac{\partial \vec{\Phi}(x, y)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{T}_y(x, y) = \frac{\partial \vec{\Phi}(x, y)}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego, hallamos el PVF:

$$\vec{T}_x(x, y) \times \vec{T}_y(x, y) = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{\i}} & \hat{\mathbf{\j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \uparrow$$

Veamos que $\uparrow$ es la orientación inducida por la parametrización $\vec{\Phi}(x, y)$ de la superficie Σ. Esta nueva orientación debe compararse con la del teorema de Gauss.

Seguidamente, evaluamos la parametrización $\vec{\Phi}$ en el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z)$. Así:

$$\vec{F}(\vec{\Phi}(x,y)) = \begin{pmatrix} y^3 \\ x+16 \\ 4+y^2 \end{pmatrix}$$

De esta forma:

$$\iint_{\Sigma\uparrow} < \vec{F}\,,\, d\vec{S} >= \iint_D < \vec{F}(\vec{\Phi}(x,y))\,,\, \vec{T}_x(x,y)\times\vec{T}_y(x,y) > \, dA$$

Sustituyendo:

$$\iint_{\Sigma\uparrow} < \vec{F}\,,\, d\vec{S} >= \iint_D < \begin{pmatrix} y^3 \\ x+16 \\ 4+y^2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} > \, dA = \iint_D 4+y^2\, dA$$

Aplicamos el siguiente cambio de coordenadas:

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2\leq 16\} \\ D^* = \{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 0\leq r\leq 4\,,\, 0\leq\theta\leq 2\pi\} \end{cases}$$

Luego, nos queda:

$$\iint_{\Sigma\uparrow} < \vec{F}\,,\, d\vec{S} >= \iint_D 4+y^2\, dA = \int_0^4\int_0^{2\pi} \left(4+r^2\sin^2(\theta)\right)|r|\, d\theta dr =$$

$$= \int_0^4\int_0^{2\pi} 4r + r^3\left(\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\right) d\theta dr = \int_0^4\int_0^{2\pi} 4r + \frac{r^3}{2} - \frac{r^3\cos(2\theta)}{2}\, d\theta dr =$$

$$= \int_0^4 2\pi\left(4r+\frac{r^3}{2}\right) - \frac{r^3}{4}\left(\sin(2\theta)\right|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dr = 2\pi\left(2r^2+\frac{1}{8}r^4\right|_{r=0}^{r=4} = 2\pi\left(2\left(4^2-0^2\right)+\frac{1}{8}\left(4^4-0^4\right)\right) =$$

$$= 2\pi(32+32) = 128\pi$$

Luego, tenemos que:

$$\iint_{\Sigma\uparrow} < \vec{F}\,,\, d\vec{S} >= 128\pi$$

Ahora, queda comparar entre la orientaciones $\uparrow$ y $\uparrow$ sobre la superficie Σ.

$\uparrow$ es la orientación del teorema de Gauss, la cual apunta hacia el exterior de la superficie Σ. Por lo tanto, $\uparrow$ es paralelo a $\hat{\mathbf{k}}$. Por otro lado, la parametrización $\uparrow$ también es paralela a $\hat{\mathbf{k}}$. Por lo tanto:

$$\int_{\Sigma\uparrow} < \vec{F}\,,\, d\vec{S} > = \int_{\Sigma\uparrow} < \vec{F}\,,\, d\vec{S} > \Longrightarrow \int_{\Sigma\uparrow} < \vec{F}\,,\, d\vec{S} > = 128\pi$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$\iint_{S\uparrow} < \vec{F}\,,\, d\vec{S} > = \frac{64\pi}{3} - \iint_{\Sigma\uparrow} < \vec{F}\,,\, d\vec{S} > = \frac{64\pi}{3} - 128\pi = -\frac{320}{3}\pi$$

Luego, resta por comparar las orientaciones $\uparrow$ y $\uparrow$ sobre la superficie S.

Veamos que $\uparrow$, por ser la orientación del teorema de Gauss, esta posee una tercera componente negativa (hacia el exterior) sobre la superficie S. Por otro lado, $\uparrow$ se encuentra orientada hacia los valores crecientes del campo escalar Ψ. En otras palabras, la superficie S se encuentra orientada en la dirección del gradiente Ψ. Entonces, para todo punto $P \in S$, tenemos:

$$\vec{\nabla}\Psi(P) = \begin{pmatrix} -\dfrac{x_P}{\sqrt{{x_P}^2 + {y_P}^2}} \\ -\dfrac{y_P}{\sqrt{{x_P}^2 + {y_P}^2}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se concluye que este gradiente apunta hacia al interior de la superficie S. Por ende, es contrario a la normal de la superficie.

Así, la parametrización $\uparrow$ resulta en la dirección contraria de $\uparrow$. Por lo tanto:

$$\int_{S\uparrow} < \vec{F}\,,\, d\vec{S} > = -\int_{S\uparrow} < \vec{F}\,,\, d\vec{S} > \Longrightarrow \int_{S\uparrow} < \vec{F}\,,\, d\vec{S} > = \frac{320}{3}\pi$$

Finalmente:

$$\boxed{\iint_{S\uparrow} < \vec{F}\,,\, d\vec{S} > = \frac{320}{3}\pi}$$

Alternativa 2: Definición de Integral de Superficie de Campo Vectorial

Parametrizamos a la superficie S mediante la función $\vec{\Phi}$. Veamos que en la definición de la superficie S se encuentra una condición sobre la variable z. Por ende, nuestra parametización será con respecto a las variables x, y.

$$\vec{\Phi} \,:\, D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \,/$$

$$(x,y) \to \vec{\Phi}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ \\ y \\ \\ \sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix} \,/\, D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 4\right\}$$

Hallamos los vectores tangentes a la superficie S parametrizada por Φ:

$$\vec{T}_x(x,y) = \frac{\partial \vec{\Phi}(x,y)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ 0 \\ \\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix} \quad \vec{T}_y(x,y) = \frac{\partial \vec{\Phi}(x,y)}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 1 \\ \\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}$$

Luego, hallamos el PVF:

$$\vec{T}_x(x,y) \times \vec{T}_y(x,y) = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \\ 1 & 0 & \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 & 1 & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \uparrow$$

Veamos que $\uparrow$ es la orientación inducida por la parametrización $\vec{\Phi}(x,y)$ de la superficie S. Esta nueva orientación debe compararse con la dada por el enunciado del problema. Seguidamente, evaluamos la parametrización $\vec{\Phi}$ en el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z)$. Así:

$$\vec{F}(\vec{\Phi}(x,y)) = \begin{pmatrix} y^3 \\ \\ x + x^2 + y^2 \\ \\ \sqrt{x^2+y^2} + y^2 \end{pmatrix}$$

De esta forma, la integral de superficie S del campo vectorial $\vec{F}$ es:

$$\iint_{S^{\uparrow}} < \vec{F} \, , \, d\vec{S} >= \iint_D < \vec{F}(\vec{\Phi}(x,y)) \, , \, \vec{T}_x(x,y) \times \vec{T}_y(x,y) > \, dA$$

Sustituyendo los elementos anteriormente encontrados tenemos que:

$$\iint_{S^{\uparrow}} < \vec{F} \, , \, d\vec{S} >= \iint_D < \begin{pmatrix} y^3 \\ \\ x + x^2 + y^2 \\ \\ \sqrt{x^2+y^2} + y^2 \end{pmatrix} \, , \, \begin{pmatrix} -\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 1 \end{pmatrix} > \, dA =$$

$$= \iint_D -\frac{y^3 x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y(x+x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} + \sqrt{x^2+y^2} + y^2 \, dA$$

Aplicamos el siguiente cambio de coordenadas:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r\cos(\theta) \\ \\ y = r\sin(\theta) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, / \, 0 \leq x^2 + y^2 \leq 16\} \\ \\ D^* = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \, / \, 0 \leq r \leq 4 \, , \, 0 \leq \theta \leq 2\pi\} \end{array} \right.$$

Sustituyendo tenemos:

$$\iint_{S^{\uparrow}} < \vec{F} \, , \, d\vec{S} >=$$

$$= \int_0^4 \int_0^{2\pi} \left(-r^3 \sin^3(\theta)\cos(\theta) - r\sin(\theta)\left(\cos(\theta) + r\cos^2(\theta) + r\sin^2(\theta)\right) + r + r^2\sin^2(\theta)\right) r \, d\theta dr$$

Veamos que:

$$\sin^3(\theta) = \sin(\theta)\sin^2(\theta) = \sin(\theta)(1-\cos^2(\theta)) = \sin(\theta) - \sin(\theta)\cos^2(\theta)$$

$$\sin^2(\theta) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2\theta)\right)$$

Así, tenemos que:

$$= \int_0^4 -r^4 \left(\frac{1}{4}\sin^4(\theta)\bigg|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} - r^2 \left(\frac{1}{2}\sin^2(\theta)\bigg|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} + r^3 \left(\frac{1}{3}\cos^3(\theta)\bigg|_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\right.\right.\right.$$

$$-r^3\left(-\left(\cos(\theta)\right|_{\theta=0}^{\theta=2\pi}+\left(\frac{1}{3}\cos^3(\theta)\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\right)+r^2\left(\theta\right|_{\theta=0}^{\theta=2\pi}+\frac{r^3}{2}\left(\theta\right|_{\theta=0}^{\theta=2\pi}-\frac{r^3}{2}\left(\frac{1}{2}\sin(2\theta)\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\right. dr$$

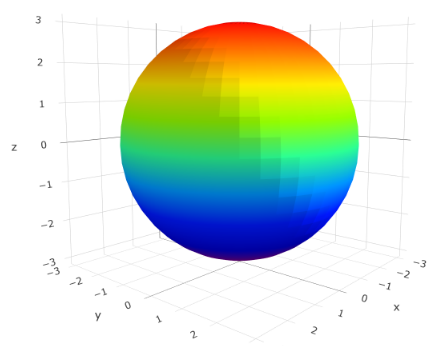
$$=2\pi\int_0^4 r^2+\frac{r^3}{2}\,dr=2\pi\left(\frac{r^3}{3}+\frac{r^4}{8}\Big|_{r=0}^{r=4}\right.=2\pi\left(\frac{64}{3}+32\right)=\frac{320}{3}\pi\Longrightarrow\iint_{S^{\uparrow}}<\vec{F}\,,\,d\vec{S}>=\frac{320}{3}\pi$$

Luego, debe compararse las orientaciones $\uparrow$ y $\uparrow$. Vease que $\vec{\nabla}\phi(P)$ (correspondiente a la orientación $\uparrow$) y la orientación inducida por la parametrización $\Phi(x,y)$ son iguales. Por ende, poseen el mismo sentido. Por lo tanto, se tiene que:

$$\boxed{\iint_{S^{\uparrow}}<\vec{F}\,,\,d\vec{S}>=\frac{320}{3}\pi}$$

13. Sea el campo vectorial $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3\,/\,\vec{F}(x,y,z)=(x,y,z)$. Hallar la integral de superficie $\iint_{S^{\uparrow}}<\vec{F}\,,\,d\vec{S}>$, sabiendo que $S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x^2+y^2+z^2=9\right\}$ y se encuentra orientada hacia la región $x^2+y^2+z^2\geq 9$.

Solución: La superficie S se trata de la superficie de una esfera centrada en $(0,0,0)$ y de radio $r=3$.



Alternativa 1: Teorema de Gauss

Definimos a la región Ω y $\text{front}\,\Omega$, donde Ω es el volumen de la esfera y $\text{front}\,\Omega$ es la superficie S. Por lo tanto, tenemos que:

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2+z^2 \leq 9\right\}$$

$$\operatorname{front}\Omega = S$$

Luego, el campo vectorial $\vec{F}$ es de clase $C^n(\mathbb{R})$, debido a que cada una de sus componentes son funciones polinómicas. Por ende, podemos garantizar que $\vec{F}$ es, al menos, de clase $C^1(\Omega \cup \operatorname{front}\Omega)$. Aplicando el teorema de Gauss, tenemos que:

$$\iiint_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{F}\, dV = \iint_{S^{\uparrow}} < \vec{F}\,, d\vec{S} >$$

donde $\uparrow$ está orientada hacia el exterior de Ω.
Notemos que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 1+1+1 = 3$$

Así:

$$\iiint_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{F}\, dV = \iiint_{\Omega} 3\, dV = 3V(\Omega)$$

donde $V(\Omega)$ es el volumen de una esfera de radio $r = 3$. Luego:

$$\iint_{S^{\uparrow}} < \vec{F}\, d\vec{S} >= 3 \cdot \frac{4\pi \cdot (3^3)}{3} = 108\pi$$

Ahora, queda comparar entre la orientaciones $\uparrow$ y $\uparrow$ sobre la superficie S.

$\uparrow$ es la orientación del teorema de Gauss, la cual apunta hacia el exterior de la superficie S. Por otro lado, la orientación $\uparrow$ apunta hacia la región $x^2+y^2+z^2 \geq 9$. Es decir, se encuentra orientada hacia los valores crecientes (exteriores) del sólido Ω. Por lo tanto, ambas orientaciones tienen la misma dirección. Así:

$$\int_{S^{\uparrow}} < \vec{F}\,, d\vec{S} >= \int_{S^{\uparrow}} < \vec{F}\,, d\vec{S} > \Longrightarrow \int_{S^{\uparrow}} < \vec{F}\,, d\vec{S} >= 108\pi$$

Finalmente:

$$\boxed{\iint_{S^{\uparrow}} < \vec{F}\,, d\vec{S} >= 108\pi}$$

Alternativa 2: Definición de Integral de Superficie de Campo Vectorial

Parametrizamos a la superficie S mediante la función $\vec{\Phi}$

$$\vec{\Phi} \, : \, D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \, /$$

$$(u,v) \to \vec{\Phi}(u,v) = \begin{pmatrix} 3\cos(u)\sin(v) \\ 3\sin(u)\sin(v) \\ 3\cos(v) \end{pmatrix} \, / \, D = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \, / \, 0 \leq u \leq 2\pi \quad 0 \leq v \leq \pi \right\}$$

Hallamos los vectores tangentes a la superficie S parametrizada por Φ:

$$\vec{T}_u(u,v) = \frac{\partial \vec{\Phi}(u,v)}{\partial u} = \begin{pmatrix} -3\sin(u)\sin(v) \\ 3\cos(u)\sin(v) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{T}_v(u,v) = \frac{\partial \vec{\Phi}(u,v)}{\partial v} = \begin{pmatrix} 3\cos(u)\cos(v) \\ 3\sin(u)\cos(v) \\ -3\sin(v) \end{pmatrix}$$

Hallamos el PVF:

$$\vec{T}_u(u,v) \times \vec{T}_v(u,v) = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ -3\sin(u)\sin(v) & 3\cos(u)\sin(v) & 0 \\ 3\cos(u)\cos(v) & 3\sin(u)\cos(v) & -3\sin(v) \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -9\cos(u)\sin^2(v) \\ -9\sin(u)\sin^2(v) \\ -9\cos(v)\sin(v) \end{pmatrix} \uparrow$$

Seguidamente, evaluamos la parametrización $\vec{\Phi}$ en el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z)$. Así:

$$\vec{F}(\vec{\Phi}(u,v)) = \begin{pmatrix} 3\cos(u)\sin(v) \\ 3\sin(u)\sin(v) \\ 3\cos(v) \end{pmatrix}$$

De esta forma, la integral de superficie S del campo vectorial $\vec{F}$ es:

$$\iint_{S\uparrow} < \vec{F} \, , \, d\vec{S} > = \iint_D < \vec{F}(\vec{\Phi}(u,v)) \, , \, \vec{T}_u(u,v) \times \vec{T}_v(u,v) > \, dA$$

$$\iint_{S^{\uparrow}} < \vec{F} \, , \, d\vec{S} >= \iint_D < \begin{pmatrix} 3\cos(u)\sin(v) \\ 3\sin(u)\sin(v) \\ 3\cos(v) \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -9\cos(u)\sin^2(v) \\ -9\sin(u)\sin^2(v) \\ -9\cos(v)\sin(v) \end{pmatrix} > dA =$$

$$= -27 \iint_D \cos^2(u)\sin^3(v) + \sin^2(u)\sin^3(v) + \cos^2(v)\sin(v) \, dA$$

Notemos que:

$$\cos^2(u)\sin^3(v) + \sin^2(u)\sin^3(v) + \cos^2\sin(v) = \sin^3(v)\left(\cos^2(u) + \sin^2(u)\right) + \cos^2(v)\sin(v) =$$

$$= \sin^3(v) + \cos^2(v)\sin(v) = \sin(v)(1 - \cos^2(v)) + \cos^2(v)\sin(v) = \sin(v) - \sin(v)\cos^2(v) + \cos^2(v)\sin(v) =$$

$$= \sin(v)$$

$$\Longrightarrow \cos^2(u)\sin^3(v) + \sin^2(u)\sin^3(v) + \cos^2\sin(v) = \sin(v)$$

Así, tenemos que:

$$= -27 \iint_D \cos^2(u)\sin^3(v) + \sin^2(u)\sin^3(v) + \cos^2(v)\sin(v) \, dA = -27 \iint_D \sin(v) \, dA =$$

$$= -27 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(v) \, du \, dv = -54\pi \int_0^{\pi} \sin(v) \, dv = 54\pi \left(\cos(v)\right|_{v=0}^{v=\pi} = -108\pi$$

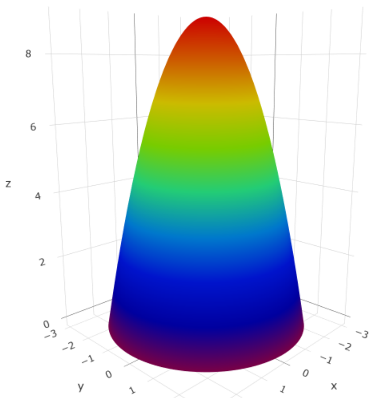
$$\Longrightarrow \iint_{S^{\uparrow}} < \vec{F} \, , \, d\vec{S} >= -108\pi$$

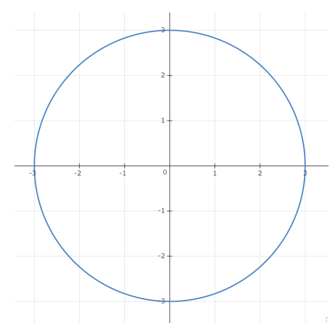
Se comparan las orientaciones $\uparrow$ y $\uparrow$. Véase que $\uparrow$ apunta hacia la región interna de la esfera, mientras que $\uparrow$ está orientada hacia los valores externos de dicha región. Por ende, ambas orientaciones tienen sentidos contrarios. Así, se tiene que:

$$\boxed{\iint_{S^{\uparrow}} < \vec{F} \, , \, d\vec{S} >= 108\pi}$$

14. Sea el campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \,/\, \vec{F}(x, y, z) = (3x, 3y, z)$. Hallar la integral de superficie $\displaystyle\iint_{S^{\uparrow}} < \vec{F}\,,\, d\vec{S} >$, sabiendo que $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, z = 9 - (x^2 + y^2) \quad z \geq 0\right\}$ y se encuentra orientada hacia los valores crecientes de $\Psi(x, y, z) = z - (9 - (x^2 + y^2))$.

Solución: La superficie S se trata de la superficie lateral del paraboloide de ecuación $z = 9 - (x^2 + y^2)$ que se encuentra por encima del plano $z = 0$, como se muestra en la figura.





Alternativa 1: Teorema de Gauss

Definimos a la región Ω y front Ω, donde Ω es el volumen de la esfera y front Ω es la superficie S y la "tapa" del paraboloide en el plano $z = 0$. Por lo tanto, tenemos que:

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 0 \leq z \leq 9 - (x^2 + y^2)\right\}$$

$$\text{front}\,\Omega = S \cup \underbrace{\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, z \leq 9 - (x^2 + y^2) \quad z = 0\right\}}_{\Sigma}$$

Por otro lado, el campo vectorial $\vec{F}$ es de clase $C^n(\mathbb{R})$, debido a que sus componentes son funciones polinómicas. Por ende, podemos garantizar que $\vec{F}$ es, al menos, de clase $C^1(\Omega \cup \text{front}\,\Omega)$. Aplicando el teorema de Gauss, tenemos que:

$$\iiint_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{F}\, dV = \iint_{\text{front}\,\Omega^{\uparrow}} < \vec{F}\,,\, d\vec{S} >$$

donde $\uparrow$ está orientada hacia el exterior de Ω.
Notemos que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 3 + 3 + 1 = 7$$

Así:

$$\iiint_{\Omega} \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\, dV = \iiint_{\Omega} 7\, dV = 7\iiint_{\Omega} dV = 7\iint_D \int_{z=0}^{z=9-(x^2+y^2)} dz\, dA = 7\iint_D 9-(x^2+y^2)\, dA$$

donde:

$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2\leq 9\right\}$$

Así, aplicamos el siguiente cambio de variable en coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 0\leq x^2+y^2\leq 9\} \\ D^* = \{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 0\leq r\leq 3\,,\, 0\leq\theta\leq 2\pi\} \end{cases}$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$\iiint_{\Omega} \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\, dV = 7\int_{r=0}^{r=3}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left(9-r^2\right) r\, d\theta dr = 14\pi\int_{r=0}^{r=3} 9r-r^3\, dr = 14\pi\left(\frac{9}{2}r^2-\frac{1}{4}r^4\right|_{r=0}^{r=3} =$$

$$= 14\pi\left(\frac{3^4}{2}-\frac{3^4}{4}\right) = \frac{567}{2}\pi$$

$$\Longrightarrow \iiint_{\Omega} \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\, dV = \frac{567}{2}\pi$$

Retomando el teorema de Gauss, tenemos que:

$$\iint_{\text{front}\,\Omega\uparrow} <\vec{F}\,,\,d\vec{S}> = \iint_{S\uparrow} <\vec{F}\,,\,d\vec{S}> + \iint_{\Sigma\uparrow} <\vec{F}\,,\,d\vec{S}> = \frac{567}{2}\pi$$

$$\Longrightarrow \iint_{S\uparrow} <\vec{F}\,,\,d\vec{S}> = \frac{567}{2}\pi - \iint_{\Sigma\uparrow} <\vec{F}\,,\,d\vec{S}>$$

Procedemos a calcular $\iint_{\Sigma\uparrow} <\vec{F}\,,\,d\vec{S}>$

Por simple inspección se evidencia que:

$$\Sigma = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/z=0\,,\, x^2+y^2\leq 9\right\}$$

Así, procedemos a parametrizar dicha superficie a través de Φ

$$\vec{\Phi}\,:\,D\subseteq\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^3\,/$$

$$(x,y)\rightarrow\vec{\Phi}(x,y)=\begin{pmatrix}x\\ \\ y\\ \\ 0\end{pmatrix}\,/\,D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x^2+y^2\leq 9\right\}$$

De esta forma, hallamos los vectores tangentes a la superficie Σ parametrizada por Φ:

$$\vec{T}_x(x,y)=\frac{\partial\vec{\Phi}(x,y)}{\partial x}=\begin{pmatrix}1\\ \\ 0\\ \\ 0\end{pmatrix}\qquad\vec{T}_y(x,y)=\frac{\partial\vec{\Phi}(x,y)}{\partial y}=\begin{pmatrix}0\\ \\ 1\\ \\ 0\end{pmatrix}$$

Luego, hallamos el PVF:

$$\vec{T}_x(x,y)\times\vec{T}_y(x,y)=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ \\ 1 & 0 & 0\\ \\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \\ 0\\ \\ 1\end{pmatrix}\uparrow$$

Seguidamente, evaluamos la parametrización $\vec{\Phi}$ en el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z)$. Así:

$$\vec{F}(\vec{\Phi}(x,y))=\begin{pmatrix}3x\\ \\ 3y\\ \\ 0\end{pmatrix}$$

De esta forma:

$$\iint_{\Sigma\uparrow}<\vec{F}\,,\,d\vec{S}>=\iint_D<\vec{F}(\vec{\Phi}(x,y))\,,\,\vec{T}_x(x,y)\times\vec{T}_y(x,y)>\,dA$$

Sustituyendo:

$$\iint_{\Sigma^{\color{red}\uparrow}} < \vec{F}\,,\, d\vec{S} >= \iint_D < \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} > dA = 0 \Longrightarrow \iint_{\Sigma^{\color{red}\uparrow}} < \vec{F}\,,\, d\vec{S} >= 0$$

Por lo tanto, sin importar la dirección de las orientaciones ${\color{red}\uparrow}$ y ${\color{orange}\uparrow}$ ya que estas solo invierten el signo algebráico del resultado de la integral de superficie, tendremos que:

$$\iint_{\Sigma^{\color{orange}\uparrow}} < \vec{F}\,,\, d\vec{S} >= 0$$

Así, tenemos que:

$$\iint_{S^{\color{orange}\uparrow}} < \vec{F}\,,\, d\vec{S} > = \frac{567}{2}\pi - 0 = \frac{567}{2}\pi \Longrightarrow \iint_{S^{\color{orange}\uparrow}} < \vec{F}\,,\, d\vec{S} > = \frac{567}{2}\pi$$

Luego, resta por comparar las orientaciones ${\color{orange}\uparrow}$ y ${\color{blue}\uparrow}$ sobre la superficie S.

Veamos que ${\color{orange}\uparrow}$, por ser la orientación del teorema de Gauss, esta posee una tercera componente positiva (hacia el exterior) sobre la superficie S. Por otro lado, ${\color{blue}\uparrow}$ se encuentra orientada hacia los valores crecientes del campo escalar Ψ. Entonces, para todo punto $P \in S$, tenemos:

$$\Psi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z - 9 \Longrightarrow \vec{\nabla}\Psi(P) = \begin{pmatrix} 2x_P \\ 2y_P \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se concluye que este gradiente apunta hacia al exterior de la superficie S. Así, la parametrización ${\color{orange}\uparrow}$ resulta en la misma dirección de ${\color{blue}\uparrow}$. Por lo tanto:

$$\int_{S^{\color{blue}\uparrow}} < \vec{F}\,,\, d\vec{S} > = \int_{S^{\color{orange}\uparrow}} < \vec{F}\,,\, d\vec{S} > \Longrightarrow \int_{S^{\color{blue}\uparrow}} < \vec{F}\,,\, d\vec{S} > = \frac{567}{2}\pi$$

Finalmente:

$$\boxed{\iint_{S^{\color{blue}\uparrow}} < \vec{F}\,,\, d\vec{S} >= \frac{567}{2}\pi}$$

Alternativa 2: Definición de Integral de Superficie de Campo Vectorial

Parametrizamos a la superficie S mediante la función $\vec{\Phi}$, usando como parámetros las variables x y y ya que hay una condición asociada a la variable z

$$\vec{\Phi} \,:\, D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \,/$$

$$(x,y) \to \vec{\Phi}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ \\ y \\ \\ 9-(x^2+y^2) \end{pmatrix} \,/\, D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 9-(x^2+y^2) \geq 0\right\}$$

Hallamos los vectores tangentes a la superficie S parametrizada por Φ:

$$\vec{T}_x(x,y) = \frac{\partial \vec{\Phi}(x,y)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ 0 \\ \\ -2x \end{pmatrix} \quad \vec{T}_y(x,y) = \frac{\partial \vec{\Phi}(x,y)}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 1 \\ \\ -2y \end{pmatrix}$$

Hallamos el PVF:

$$\vec{T}_x(x,y) \times \vec{T}_y(x,y) = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \\ 1 & 0 & -2x \\ \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ \\ 2y \\ \\ 1 \end{pmatrix} \uparrow$$

Seguidamente, evaluamos la parametrización $\vec{\Phi}$ en el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z)$. Así:

$$\vec{F}(\vec{\Phi}(x,y)) = \begin{pmatrix} 3x \\ \\ 3y \\ \\ 9-(x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

De esta forma, la integral de superficie S del campo vectorial $\vec{F}$ es:

$$\iint_{S\uparrow} < \vec{F} \,,\, d\vec{S} >= \iint_D < \vec{F}(\vec{\Phi}(x,y)) \,,\, \vec{T}_x(x,y) \times \vec{T}_y(x,y) > \, dA$$

$$\iint_{S^{\uparrow}} < \vec{F}\,,\, d\vec{S} >= \iint_D < \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 9-(x^2+y^2) \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix} > dA =$$

$$= \iint_D 6x^2 + 6y^2 + 9 - x^2 - y^2 \, dA = \iint_D 5x^2 + 5y^2 + 9 \, dA$$

Aplicamos el siguiente cambio de variable en coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \leq x^2 + y^2 \leq 9\} \\ D^* = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \leq r \leq 3\,,\, 0 \leq \theta \leq 2\pi\} \end{cases}$$

Luego, nos queda una integral doble de sencilla resolución:

$$\iint_{S^{\uparrow}} < \vec{F}\,,\, d\vec{S} >= \int_{r=0}^{r=3} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left(5r^2 + 9\right) |r| \, d\theta \, dr = 2\pi \int_{r=0}^{r=3} 5r^3 + 9r \, d\theta = 2\pi \left(\frac{5}{4} r^4 + \frac{9}{2} r^2 \right|_{r=0}^{r=3} =$$

$$= 2\pi \left(\frac{5 \cdot 3^4}{4} + \frac{9 \cdot 3^2}{2} \right) = \frac{567}{2}\pi \Longrightarrow \iint_{S^{\uparrow}} < \vec{F}\,,\, d\vec{S} >= \frac{567}{2}\pi$$

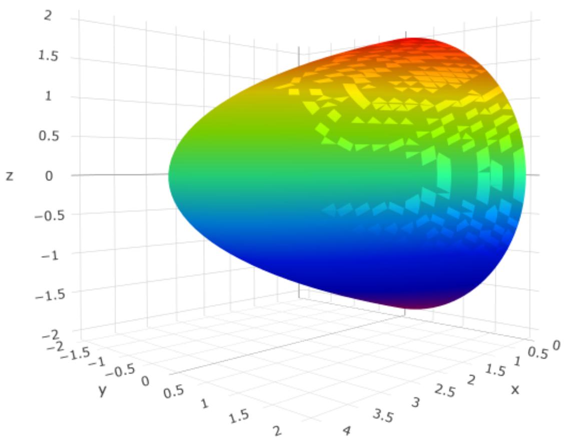
Se comparan las orientaciones $\uparrow$ y $\uparrow$. Véase que $\uparrow$ y $\uparrow$ tienen los mismos vectores normales. Por lo tanto, ambas direcciones poseen igual orientación. Luego:

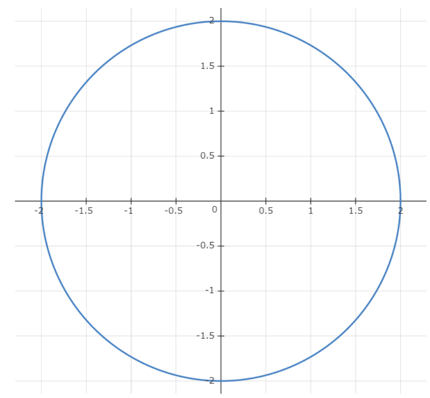
$$\boxed{\iint_{S^{\uparrow}} < \vec{F}\,,\, d\vec{S} >= \frac{567}{2}\pi}$$

15. Sea el campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \,/\, \vec{F}(x,y,z) = (x^2\sin(y) - 1, xe^z, yx^2z^3)$. Hallar la integral de superficie $\iint_{S^{\uparrow}} < \vec{\nabla} \times \vec{F}\,,\, d\vec{S} >$, sabiendo que $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x = 4 - (y^2 + z^2) \quad x \geq 0\right\}$ y se encuentra orientada con una normal de primera componente positiva.

Solución:

Veamos que la superficie S se trata de la parte "positiva" de un paraboloide de vértice $(4,0,0)$, como se muestra en la figura.





Alternativa 1: Teorema de Stokes

Se define la frontera de la superficie S $front\, S$, el cual es el "borde" circular del paraboloide en el plano $x = 0$. Es decir:

$$front\, S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x = 4 - (y^2 + z^2) \quad x = 0\right\}$$

Simplificando la expresión de front S tenemos:

$$front\, S = \left\{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x = 0 \quad y^2 + z^2 = 4\right\}$$

Por simple inspección, el campo vectorial $\vec{F}$ está compuesto de funciones polinómicas, exponenciales sencillas y una función trigonométrica $\sin(x)$, las cuales todas son de clase $C^n(\mathbb{R})$. Por ende, podemos garantizar que $\vec{F}$ es, al menos, de clase $C^1(S \cup front\, S)$ en la superficie S y su frontera.

Por ende, podemos aplicar el teorema de Stokes de la siguiente manera:

$$\int_{front\, S^{\uparrow}} < \vec{F}\,,\, \vec{ds} > = \iint_{S^{\uparrow}} < \vec{\nabla} \times \vec{F}\,,\, \vec{dS} >$$

donde $\uparrow$ es tal que la $front\, S$ debe ser recorrida de acuerdo a la regla de la mano derecha.

Ahora, solo queda calcular la integral de línea del campo vectorial $\vec{F}$ a lo largo de la curva cerrada, simple y suave de $front\,S$. Para ello, procedemos a parametrizar dicha curva:

$$\vec{\sigma}\,:\,t \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3\,/$$

$$t \to \vec{\sigma}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix}\,/\,t \in [0, 2\pi] \quad \uparrow$$

Hallamos el vector tangente a la curva $front\,S$:

$$\vec{\sigma'}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \end{pmatrix}$$

Luego, evaluamos la parametrización $\vec{\sigma}$ en el campo vectorial $\vec{F}$:

$$\vec{F}(\vec{\sigma}(t)) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De esta forma, la integral de línea del campo vectorial $\vec{F}$ sobre la curva $front\,S$ es:

$$\int_{front\,S^{\uparrow}} < \vec{F}\,,\,\vec{ds} > = \int_a^b < \vec{F}(\vec{\sigma}(t))\,,\,\vec{\sigma'}(t) > \,dt$$

Sustituyendo, tenemos que:

$$\int_{front\,S^{\uparrow}} < \vec{F}\,,\,\vec{ds} > = \int_0^{2\pi} < \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,,\,\begin{pmatrix} 0 \\ -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \end{pmatrix} > \,dt = \int_0^{2\pi} 0\,dt = 0$$

Así, tenemos que:

$$\int_{front\,S^{\uparrow}} < \vec{F}\,,\,\vec{ds} > = 0$$

Luego, sin importar las orientaciones $\uparrow$ y $\uparrow$ sobre la curva $front\, S$, el resultado de la integral de línea seguirá siendo nulo. Por lo tanto:

$$\int_{front\, S^{\uparrow}} < \vec{F}\,,\, \vec{ds} > = \int_{front\, S^{\uparrow}} < \vec{F}\,,\, \vec{ds} > = 0 \Longrightarrow \int_{front\, S^{\uparrow}} < \vec{F}\,,\, \vec{ds} > = 0$$

De esta forma, se tiene que:

$$\iint_{S^{\uparrow}} < \vec{\nabla} \times \vec{F}\,,\, \vec{dS} > = \int_{front\, S^{\uparrow}} < \vec{F}\,,\, \vec{ds} > = 0 \Longrightarrow \iint_{S^{\uparrow}} < \vec{\nabla} \times \vec{F}\,,\, \vec{dS} > = 0$$

De igual forma, el sentido de las orientaciones $\uparrow$ y $\uparrow$ no afectará el resultado de la integral de superficie sobre S. Así, finalmente:
Finalmente:

$$\boxed{\iint_{S^{\uparrow}} < \vec{\nabla} \times \vec{F}\,,\, \vec{dS} > = 0}$$

Alternativa 2: Teorema de Gauss

Definimos a la región Ω y front Ω, donde Ω es el volumen que se encuentra dentro del paraboloide por encima del plano $x = 0$ y front Ω es tanto la superficie S como la "tapa" correspondiente a la intersección del sólido y el plano $x = 0$. Por lo tanto, tenemos que:

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 0 \leq x \leq 4 - (y^2 + z^2)\right\}$$

$$\text{front}\,\Omega = \; S \,\cup \underbrace{\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x \leq 4 - (y^2 + z^2) \quad x = 0\right\}}_{\Sigma}$$

Por otro lado, el campo vectorial $\vec{F}$ es de clase $C^n(\mathbb{R}^n)$. Por ende, podemos garantizar que $\vec{F}$ es, al menos, de clase $C^2(\mathbb{R}^3)$ y, por lo tanto, también es de clase $C^1(\Omega \cup \text{front}\,\Omega)$. Luego, aplicando el teorema de Gauss tenemos que:

$$\iiint_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right)\, dV \;=\; \iint_{\text{front}\,\Omega^{\uparrow}} < \vec{\nabla} \times \vec{F}\,,\, \vec{dS} >$$

donde $\uparrow$ está orientada hacia el exterior de Ω.

Notemos que, si $\vec{F}$ es de clase $C^2(\mathbb{R}^3)$, entonces:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{F} \right) = 0$$

Por lo tanto, se tiene:

$$\iiint_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{F} \right) \, dV = 0$$

Luego:

$$\iint_{\text{front}\,\Omega\uparrow} < \vec{\nabla} \times \vec{F} \, , \, d\vec{S} >= \iint_{S\uparrow} < \vec{\nabla} \times \vec{F} \, , \, d\vec{S} > + \iint_{\Sigma\uparrow} < \vec{\nabla} \times \vec{F} \, , \, d\vec{S} >= 0$$

Despejando:

$$\iint_{S\uparrow} < \vec{\nabla} \times \vec{F} \, , \, d\vec{S} >= - \iint_{\Sigma\uparrow} < \vec{\nabla} \times \vec{F} \, , \, d\vec{S} >$$

Procedemos a calcular la integral de superficie sobre Σ. Por simple inspección se evidencia que:

$$\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, / \, x = 0 \, , \, 4 - (y^2 + z^2) \leq 0 \right\}$$

Luego, procedemos a parametrizar dicha superficie a través de Φ

$$\vec{\Phi} \, : \, D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \, /$$

$$(y, z) \to \vec{\Phi}(y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \, / \, D = \left\{ (y, z) \in \mathbb{R}^2 \, / \, y^2 + z^2 \leq 4 \right\}$$

Los vectores tangentes a la superficie Σ parametrizada por Φ son:

$$\vec{T}_y(y, z) = \frac{\partial \vec{\Phi}(y, z)}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{T}_z(y, z) = \frac{\partial \vec{\Phi}(y, z)}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego, hallamos el PVF:

$$\vec{T}_y(y,z) \times \vec{T}_z(y,z) = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \uparrow$$

Veamos que $\uparrow$ es la orientación inducida por la parametrización $\vec{\Phi}(y,z)$ de la superficie Σ. Esta nueva orientación debe compararse con la del teorema de Gauss.

Por otro lado, hallamos $\vec{\nabla} \times \vec{F}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2\sin(y) - 1 & xe^z & x^2yz^3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} x^2z^3 - xe^z \\ -2xyz^3 \\ e^z - x^2\cos(y) \end{pmatrix}$$

Evaluamos la parametrización $\vec{\Phi}$ en el campo vectorial $\vec{\nabla} \times \vec{F}$. Así:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{\Phi}(y,z)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^z \end{pmatrix}$$

De esta forma, la integral de superficie Σ del campo vectorial $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ es:

$$\iint_{\Sigma\uparrow} < \vec{\nabla} \times \vec{F} \, , \, d\vec{S} >= \iint_D < \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{\Phi}(y,z)) \, , \, \vec{T}_y(y,z) \times \vec{T}_z(y,z) > \, dA$$

Sustituyendo:

$$\iint_{\Sigma\uparrow} < \vec{\nabla} \times \vec{F} \, , \, d\vec{S} >= \iint_D < \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^z \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} > \, dA = 0$$

Luego, tenemos que:

$$\iint_{\Sigma\uparrow} < \vec{\nabla} \times \vec{F} \, , \, d\vec{S} >= 0$$

Por lo tanto, sin importar los sentidos de las orientaciones $\uparrow$ y $\uparrow$ sobre la superficie Σ, el resultado de la integral de superficie no cambiará. Así:

$$\int_{\Sigma^{\uparrow}} < \vec{\nabla} \times \vec{F}\,,\, d\vec{S} > = \int_{\Sigma^{\uparrow}} < \vec{\nabla} \times \vec{F}\,,\, d\vec{S} > \Longrightarrow \int_{\Sigma^{\uparrow}} < \vec{\nabla} \times \vec{F}\,,\, d\vec{S} > = 0$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$\iint_{S^{\uparrow}} < \vec{\nabla} \times \vec{F}\,,\, d\vec{S} > = \iint_{\Sigma^{\uparrow}} < \vec{\nabla} \times \vec{F}\,,\, d\vec{S} > \Longrightarrow \iint_{S^{\uparrow}} < \vec{\nabla} \times \vec{F}\,,\, d\vec{S} > = 0$$

De igual forma, el sentido de las orientaciones $\uparrow$ y $\uparrow$ no afectará el resultado de la integral de superficie. Así, tenemos que:

$$\boxed{\iint_{S^{\uparrow}} < \vec{\nabla} \times \vec{F}\,,\, d\vec{S} > = 0}$$